**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 5 · 1976**

УДК 532.5.013.4 : 538.4

# ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. В. ЩЕЛКАЧЕВ

*(Москва)*

В работе исследуется гравитационная неустойчивость границы раздела двух сжимаемых или несжимаемых жидкостей, находящихся в электромагнитном поле, когда одна из жидкостей имеет конечную проводимость, а другая непроводящая. Магнитное число Рейнольдса считается малым. Показано, что в отличие от случаев, исследованных в [1, 2] (по обе стороны от поверхности разрыва — сжимаемые бесконечно проводящие жидкости), электромагнитное поле не может стабилизировать границу раздела, при этом могут существовать устойчивые направления распространения возмущений. Наличие стенок уменьшает рост возмущений [2, 3], а их проводимость не влияет на неустойчивость границы раздела. Наибольший рост возмущений приходится на волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, причем в случае несжимаемых жидкостей электромагнитные поля не влияют на эти возмущения, а в случае сжимаемых — влияют.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим два плоских бесконечных слоя адиабатически сжимаемых, идеальных и однородных тяжелых жидкостей, находящихся в контакте друг с другом (плоскость $z=0$) и ограниченных непроницаемыми стенками ($z=h_1$ и $z=-h_2$). Жидкости ведут себя как совершенные газы и находятся в поле силы тяжести $f=(0, 0, -g)$, нормальной к поверхности раздела сред. Параллельно границе раздела приложены однородные магнитное $H_0(H_0, 0, 0)$ и электрическое $E_0(0, E_0, 0)$ поля. Считается, что верхний слой жидкости тяжелее нижнего и непроводящий, а нижний слой имеет конечную проводимость. Предполагается, что магнитное поле, индуцированное за счет возникших в проводящей области электрических токов мало и им пренебрегается по сравнению с заданным магнитным полем $H_0$.

На границе раздела, являющейся контактным разрывом, давление, нормальные составляющие электрических токов равны нулю, а нормальные составляющие скорости частиц жидкости равны скорости контактного разрыва.

На стенках выполняется условие непроницаемости и, как будет показано ниже, несущественно — проводящие они или непроводящие.

Для исследования устойчивости в рамках линейной теории будем искать решение в виде $A=A_0+a'$, где $A_0$ — параметр, характеризующий начальное состояние среды, $a'$ — малое возмущение, при этом будем считать, что на стенках все возмущения гидродинамических величин исчезают. В дальнейшем будем считать, что жидкости в невозмущенном состоянии однородны, что справедливо для слабо сжимаемых жидкостей или для коротковолновых колебаний. Полагая, что в начальный момент времени среда покоилась, запишем в общепринятых обозначениях систему уравнений для возмущений с учетом адиабатичности процессов ($p'=a_0^2\rho'$) [4]

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}'=0 \tag{1.1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + a_0^2\, \nabla\rho' + \frac{1}{c}\, \mathbf{j}'\times\mathbf{H}_0 = 0$$

$$\mathbf{j}' = \sigma\left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{v}'\times\mathbf{H}_0\right), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}' = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j}' = 0$$

Уравнение импульсов вдоль любой гладкой кривой, принадлежащей возмущенной границе раздела, определяет давление на контактном разрыве и имеет вид

$$\rho\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, v_s\right] + \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]_s = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{s}$ — единичный вектор касательной к кривой. Так как число Рейнольдса и наклон профиля волны малы, то $[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]_s = [\mathbf{j}_0\times\mathbf{H}_0]_s$. Так как нормальные составляющие электрических токов на разрыве равны нулю, то из (1.1) можно получить, что скорость $v_s$ на разрыве не зависит от величины электрического тока на стенках. Следовательно, давление на разрыве не зависит от величины электрического тока на стенках, а так как из граничного условия для давления получается дисперсионное уравнение, то проводимость стенок не влияет на стабилизацию границы раздела.

Система (1.1) позволяет искать решение в виде

$$a' = a_*(z)\exp(ik_x x + ik_y y + \omega t)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ — волновой вектор. Звездочку в дальнейшем опускаем, при этом параметры, характеризующие верхний слой жидкости, будем отмечать индексом 1, а нижний — 2. Система уравнений для амплитуд позволяет получить уравнения для компонент скорости вдоль оси $Z$

$$\frac{\delta^2}{k^4}\frac{d^4 v_{z2}}{dz^4} + \alpha_2\frac{\delta^2}{k^3}\frac{d^3 v_{z2}}{dz^3} - \frac{\delta}{k^2}(\varepsilon+\varkappa)\frac{d^2 v_{z2}}{dz^2} - \tag{1.3}$$

$$-\alpha_2\frac{\delta}{k}\varepsilon\frac{dv_{z2}}{dz} + \varepsilon\varkappa v_{z2} = 0$$

$$\frac{1}{k^2}\frac{d^2 v_{z1}}{dz^2} + \frac{\alpha_1}{k}\frac{dv_{z1}}{dz} - (\alpha_1\delta^2+1)\, v_{z1} = 0$$

$$\delta = \frac{\omega}{\sqrt{kg}}, \quad \alpha_i = \frac{g}{k a_{0i}^2}, \quad \varepsilon = \delta + B\cos^2\varphi$$

$$B = \frac{\sigma_2 H_0^2}{c^2\rho_{02}\sqrt{kg}}, \quad \varkappa = \alpha_2\delta^2(\delta+B)+\varepsilon, \quad k = |\mathbf{k}|$$

где $\varphi$ — угол, образованный осью $x$ и вектором $\mathbf{k}$.

Используя условия непроницаемости на стенках и граничные условия для скоростей, нормальных контактному разрыву, получим решения системы (1.3).

Для сжимаемых жидкостей при бесконечно удаленных стенках ($h_i = \infty$) от контактного разрыва

$$v_{z1} = C_1\exp\left(-\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4(\alpha_1\delta^2+1)}}{2}kz\right) \tag{1.4}$$

$$v_{z2} = C_2\exp(\sqrt{\varepsilon/\delta}\, kz) + C_3\exp\left(\frac{-\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\varkappa/\delta}}{2}kz\right)$$

$$C_1 = C_2 + C_3$$

Для несжимаемых жидкостей ($\alpha_i=0$)

$$v_{z1}=C_4\,\mathrm{sh}\,[(z-h_1)k],\quad v_{z2}=C_5\,\mathrm{sh}\,[\sqrt{\varepsilon/\delta}(z+h_2)k] \tag{1.5}$$

$$C_5\,\mathrm{sh}\,[\sqrt{\varepsilon/\delta}h_2k]=-C_4\,\mathrm{sh}\,[h_1k]$$

При $h_i\to\infty$ из (1.5) или при $\alpha_i\to0$ из (1.4) получаем

$$v_{z1}=C_6\exp(kz),\quad v_{z2}=C_6\exp(-\sqrt{\varepsilon/\delta}kz) \tag{1.6}$$

Из непрерывности нормальных составляющих электрического тока и давления на границе слоев следует, что

$$E_{z2}'=E_0\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{1}{c}H_0v_{y2}',\quad \frac{dp_{01}}{dz}b+p_1'=\frac{dp_{02}}{dz}b+p_2' \tag{1.7}$$

Используя (1.7), выразим давление $p$ и компоненту скорости $v_x$ через компоненту скорости $v_z$ и ее производные

$$p_j=\frac{\rho_{0j}\omega}{k^2}\frac{dv_{zj}}{dz}+\frac{\sigma_j}{c}E_0H_0\frac{\sin^2\varphi}{\omega}v_{zj}-i\frac{\rho_{0j}\omega^3}{k^3\cos\varphi a_{0j}}v_{xj} \tag{1.8}$$

$$v_{x1}=i\frac{\cos\varphi}{(\alpha_2\delta^2+1)k}\frac{dv_{z1}}{dz}$$

$$v_{x2}=i\frac{\cos\varphi}{\alpha_2\delta[\varkappa\delta^3-(1+\alpha_2\delta^2)]}\left[\frac{\delta^3}{k^3}\frac{d^3v_{z2}}{dz^3}+\frac{\delta(1+\alpha_2\delta^2)}{k^2}\frac{d^2v_{z2}}{dz^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon\delta^2}{k}\frac{dv_{z2}}{dz}-\varepsilon(1+\alpha_2\delta^2)v_{z2}\right]$$

В случае несжимаемости последний член в выражении для давления в (1.8) отсутствует.

**2. Получение и исследование дисперсионных соотношений.** Воспользовавшись граничными условиями (1.7), получим дисперсионное уравнение для сжимаемых жидкостей из (1.4) и для несжимаемых соответственно из (1.5) и (1.6)

$$(\delta\sqrt{\delta\varepsilon}-D\sin^2\varphi)\sqrt{\alpha_1\delta^2+1}(r+2\sqrt{\varepsilon})+\{[D-(R-1)]\sqrt{\alpha_1\delta^2+1}+ \tag{2.1}$$

$$+R\delta^2\}[2\sqrt{\varepsilon}(1+\alpha_2\delta^2+r+2\alpha_2\sqrt{\delta}]=0$$

$$\delta^2\left\{R\,\mathrm{cth}\,h_1+\sqrt{1+\frac{B\cos^2\varphi}{\delta}}\,\mathrm{cth}\left(\sqrt{1+\frac{B\cos^2\varphi}{\delta}}h_2\right)\right\}+S=0 \tag{2.2}$$

$$\delta^2\left\{R+\sqrt{1+\frac{B\cos^2\varphi}{\delta}}\right\}+S=0 \tag{2.3}$$

$$R=\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}>1,\quad D=\frac{\sigma_2E_0H_0}{c\rho_{02}g},\quad S=D\cos^2\varphi-(R-1),$$

$$r=\sqrt{\delta\alpha_2{}^2+4\varkappa}-\alpha_2\sqrt{\delta}$$

В случае коротковолновых колебаний ($\alpha_i\ll1$) из (2.1) получаем

$$[\delta\sqrt{\delta\varepsilon}-D\sin^2\varphi]\sqrt{\alpha_1\delta^2+1}(\delta+B)+ \tag{2.4}$$

$$+\{[D-(R-1)]\sqrt{\alpha_1\delta^2+1}+R\delta^2\}(\sqrt{\varkappa\varepsilon}+R\sin^2\varphi)=0$$

В работе [5] получено, но не исследовано дисперсионное уравнение (2.3). При отсутствии магнитного поля или когда $\mathbf{k}\|\mathbf{H}_0$ уравнения (2.2) и (2.3) совпадают с уравнениями [3], полученными при отсутствии магнитного поля

$$\delta^2=\frac{R-1}{R\operatorname{cth}h_1+\operatorname{cth}h_2}=d_h^2,\quad \delta^2=\frac{R-1}{R+1}=d^2 \tag{2.5}$$

Неустойчивость имеет место только в случае существования у дисперсионного уравнения корней с положительной действительной частью. В уравнениях (2.5) такие корни $d>d_h>0$ всегда присутствуют, так как $R>1$. Исследуем дисперсионные уравнения (2.1)–(2.4). Легко видеть, что при $S<0$ в каждом из уравнений (2.1)–(2.4) всегда существует положительный действительный корень, а при $S\geqslant 0$ таких корней может быть четное число, либо такие корни отсутствуют. Заметим, что точки ветвления дисперсионных уравнений (2.2)–(2.4) расположены в левой полуплоскости. С помощью принципа аргумента получим, что при $S<0$ уравнения (2.2)–(2.4) имеют только по одному корню с положительной действительной частью, следовательно, эти корни действительны. При $S\geqslant 0$ в уравнениях (2.2)–(2.4) корней с положительной действительной частью нет. Поэтому в случае несжимаемости и сжимаемости неустойчивость имеет место в области углов $\varphi$, удовлетворяющих неравенству $\cos^2\varphi<(R-1)/D$, где $S<0$.

Сравнивая уравнения (2.2)–(2.4) для разных углов $\varphi$ (случай $\cos\varphi=0$ со случаями $\cos\varphi\neq 0$), убедимся, что положительные действительные корни этих уравнений при $\cos\varphi=0$ превышают положительные действительные корни соответственно этих же уравнений при $\cos\varphi\neq 0$. Следовательно, максимальный рост неустойчивости возникает в волнах, распространяющихся вдоль магнитного поля в сжимаемых (когда $\alpha\ll 1$) и несжимаемых жидкостях. При этом в случае несжимаемых жидкостей электромагнитное поле не влияет на рост этих возмущений, а в случае сжимаемых — влияет и можно показать, что оно может как увеличить, так и уменьшить (случай слабой сжимаемости) рост неустойчивых возмущений.

Если все величины в случае несжимаемых жидкостей считать не зависящими от координаты $x$, то поле скоростей будет потенциальным, а волновой вектор будет направлен вдоль магнитного поля ($\mathbf{k}\|\mathbf{H}_0$). Дисперсионными уравнениями при этом будут (2.5). Если $\theta$ и $\psi$ — градиенты возмущений скорости и электрического поля, то, решая систему (1.1), в этом случае получим

$$\psi=(-1)^n iC\theta,\quad \frac{\partial\psi}{\partial z}=(-1)^n C\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-(-1)^n C\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

$$C=\frac{k}{\omega}E_0+\frac{1}{c}H_0$$

$n=1$ соответствует непроводящей жидкости, $n=2$ — проводящей. Отсюда следует, что поверхности тока совпадают с поверхностями равного потенциала электрического поля. Тогда, используя закон Ома, получим, что электрические токи в проводящей жидкости отсутствуют и электромагнитные поля не влияют на неустойчивость.

Автор выражает благодарность А. А. Бармину и А. Г. Куликовскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 16 I 1976

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Николаев Ю. М.* Влияние магнитного поля на развитие тейлоровской неустойчивости сжимаемых проводящих жидкостей. Вестн. МГУ. Сер. Физ. астрон., 1967, № 5.
2. *Полянин А. Д.* Развитие тейлоровской неустойчивости в сжимаемых проводящих средах, находящихся в магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
5. *Зимин Э. П., Эйсмонт О. А.* О неустойчивости Рэлея – Тейлора в магнитной гидродинамике в гальваническом приближении. ПМТФ, 1970, № 5.