$$(12)\quad \left(\frac{1}{\mathrm{Sc}_j}-1\right)\tau\frac{\partial\tau}{\partial v_x}\frac{\partial c_j}{\partial v_x}+\tau^2\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{1}{\mathrm{Sc}_j}\frac{\partial c_j}{\partial v_x}\right)-$$

$$-\eta\rho v_x\frac{\partial c_j}{\partial s}+\eta\frac{\partial c_j}{\partial v_x}\frac{\partial p}{\partial s}+\eta K_j m_j\frac{dx}{ds}=0,\qquad j=1,2,\ldots,(\sigma-1)$$

$$(13)\quad v_x\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\eta\rho}{\tau}\right)+\frac{\partial^2\tau}{\partial v_x^2}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)=0$$

Полученные системы дифференциальных уравнений в форме (6) – (8) и (11) – (13) описывают единым образом плоские и осесимметричные течения многокомпонентного газа с химическими реакциями. Для нереагирующего газа ($K_j=0$) системы даже в общем случае не содержат переменную r/L. На основе указанных преобразований можно выполненные в переменных Мизеса или Крокко решения, относящиеся к плоскому потоку, использовать для получения простых решений в осесимметричном случае. Указанные преобразования предоставляют новые возможности в теории пограничного слоя и их применение может оказаться удобным при рассмотрении некоторых частных классов течений.

Поступила 20 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lees L.* Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, No. 4.
2. *Дородницын А. А.* Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
3. *Blasius H.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. und Phys., 1958, Bd 56.
4. *Степанов Е. И.* Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движений с осевой симметрией. ПММ, 1947, т. 9, вып. 1.
5. *Mangler W.* Zusammenhang zwischen ebenen und rotationsymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. ZAMM, 1948, Bd 28.
6. *Mises R.* Bemerkungen zur Hydrodynamik, 1927, vol. 7.
7. *Crocco L.* Sullo strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana. Rend. Math. Univ. Roma, 1941, vol. 5; Atti di Gidonia, 1939, vol. 17, No. 7.
8. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. Изд-во иностр. лит., 1962.
9. *Тирский Г. А.* Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 115, № 6.
10. *Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П.* Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
11. *Анкудинов А. Л.* О численном интегрировании уравнений пограничного слоя в переменных Мизеса. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.

УДК 533.6.011:535.21

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОМ, РЕЛАКСИРУЮЩЕМ, ИЗЛУЧАЮЩЕМ ДВУХАТОМНОМ ГАЗЕ

Л. В. КАТКОВСКИЙ

(Минск)

В задачах радиационной газодинамики, когда главным образом интересуются излучением движущегося газа, обычно пренебрегают влиянием излучения на параметры газового потока; в противном случае задача сильно усложняется. В [1] было изучено развитие начальных возмущений в рассеивающем, излучающем, поглощающем, вязком, теплопроводном газе при наличии локального термодинамического равновесия. Однако при пониженных давлениях ($p\sim10^{-4}-10^{-3}$ *ат*) и достаточно высоких температурах активных степеней свободы молекул ($T\sim(1\div3)\cdot10^3$ °K) распределение молекул по колебательным уровням может сильно отличаться от равновесного ввиду близости по порядку величины времени колебательной релаксации при столкновениях τ_c и времени радиационной дезактивации возбужденных молекул τ^* [2, 3]. В настоящей работе рассматриваются нормальные волны в колебательно-неравновесной среде с учетом рассеяния излучения в колебательно-вращательной полосе. Выписано дисперсионное соотношение и рассмотрены некоторые предельные случаи.

1. Будем характеризовать колебательные степени свободы молекул плотностью колебательной энергии на единицу массы ε. В случае учета неравновесного излучения и релаксации к системе уравнений газодинамики, учитывающей излучение путем включения в правую часть уравнения для полной энергии газа дивергенции интегрального потока излучения (со знаком «минус»), необходимо добавить уравнение переноса излучения с неравновесной функцией источника и уравнение кинетики, определяющее ε (см. соответственно, уравнения (1), (2) в [2]). Последние два уравнения для двухатомных молекул в суперпозиционном приближении гармонического осциллятора и «жесткого» ротатора и «узкой полосы» эквивалентны одному интегро-дифференциальному уравнению для ε[1] (для безграничной среды):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\nabla+\frac{1}{\tau(\mathbf{r},t)}\right)\varepsilon(\mathbf{r},t)=\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)\,\varepsilon(\mathbf{r}',t)\,d\mathbf{r}'+\frac{\varepsilon_0(\mathbf{r},t)}{\tau_c(\mathbf{r},t)} \tag{1.1}$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)=\frac{2m}{c^2\nu_0\rho(\mathbf{r},t)}\int\limits_0^\infty \nu^3k_\nu(\mathbf{r})\,k_\nu(\mathbf{r}')\,\frac{\exp[-\tau_\nu(\mathbf{r},\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\,d\nu \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau_c}+\frac{1}{\tau^*},\qquad \tau_\nu(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\left|\int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'}k_\nu(s)\,ds\right| \tag{1.3}$$

$\varepsilon_0(\mathbf{r},t)$ – равновесное значение $\varepsilon(\mathbf{r},t)$.

Здесь k_ν – спектральный коэффициент поглощения, $\tau_\nu(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – оптическая толщина, m – масса молекулы, c – скорость света, ρ – плотность, ν_0 – частота в центре полосы излучения двухатомной молекулы. Интегрирование в (1.3) идет вдоль луча $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, а в (1.1) прозводится по всему бесконечному пространству.

Линеаризованная и обезразмеренная относительно состояния покоя и равновесия однородного газа система уравнений газодинамики с учетом вязкости и теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\mathbf{v}=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\gamma^{-1}(\nabla\rho+\nabla T)+N_R^{-1}(\nabla^2\mathbf{v}-\nabla\operatorname{div}\mathbf{v})+X\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\gamma\,\mathrm{Pe}^{-1}\Delta+\frac{c_{v0}}{c_{V0}}R_c\right)T+\frac{c_0^2}{c_{p0}T_0}\nabla\mathbf{v}=\frac{\varepsilon_0R_c}{c_{V0}T_0}\varepsilon \tag{1.6}$$

$$\left(t=\frac{t'}{\tau_0},\ \mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}'}{L},\ \rho=\frac{\rho'-\rho_0}{\rho_0},\ T=\frac{T'-T_0}{T_0},\ \mathbf{v}=\frac{\mathbf{v}'}{c_0},\ \varepsilon=\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)$$

Здесь характерные параметры с индексом «0» внизу относятся к невозмущенной среде, $c_0^2=\gamma(\partial p/\partial\rho)_0=\gamma(p_0/\rho_0)$ – «замороженная» скорость звука ($\gamma=7/5$), c_{v0} – теплоемкость колебательных степеней свободы на единицу массы, c_{V0} – теплоемкость активных степеней свободы на единицу массы, характерное время – τ_0, $R_c=\tau_0/\tau_{c0}$, $N_R=\rho_0Lc_0/\mu_0$ – характерное число Рейнольдса, $L=c_0\tau_0$, $\mathrm{Pe}=c_0Lc_{p0}\rho_0/\varkappa$ – число Пекле, $X=(\mu_1+2\mu_0)/\rho_0Lc_0$; μ_0, μ_1 – коэффициенты первой и второй вязкости соответственно, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности.

2. Для линеаризации интегродифференциального уравнения (1.1) используем явное выражение для коэффициента поглощения [3]. Так как в дальнейшем будем интересоваться решениями исходной системы в виде плоских гармонических волн, то, вычисляя оптическую толщину $\tau_\nu(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ с использованием линеаризованного коэффициента поглощения $k_{\nu0}$, с необходимой точностью получим:

$$\tau_\nu(\mathbf{r},\mathbf{r}')=k_{\nu0}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{2.1}$$

Учитывая (2.1) и тот факт, что допплеровские линии спектра слабо перекрываются, т. е. почти изолированы, можно произвести приближенное интегрирование ядра

[1] *Круглов В. И.* К теории колебательно-неравновесного излучения двухатомного газа. Канд. дис. Минск, 1975.

(1.2) по частоте, именно по контуру одной линии, а затем суммирование по вращательным квантовым числам j, заменив его интегрированием. В результате придем к линейному относительно возмущений уравнению:

$$(2.2)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+1\right)\varepsilon(\mathbf{r},t)=\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\frac{R^*}{Kn_r}\int\frac{\exp[-Lk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\Big[\varepsilon(\mathbf{r}',t)+$$

$$+\rho(\mathbf{r}',t)-\frac{1}{2}T(\mathbf{r}',t)\Big]d\mathbf{r}'+\left(R_c\frac{c_{v0}T_0}{\varepsilon_0}-\frac{\sqrt{2\pi}}{8}R^*\right)T(\mathbf{r},t)$$

$$k_0=\frac{1+\sqrt{e}}{4e\sqrt{\pi}}B\theta^2\left(\frac{B_e m}{hc}\right)^{1/2}\frac{p_0}{T_0^2},\qquad R^*=\frac{\tau_0}{\tau^*}$$

$$\frac{1}{\tau^*}=\frac{8\pi h\nu_0^3B}{c^2},\qquad \theta=\frac{hc}{k_B}$$

Здесь h – постоянная Планка, k_B – постоянная Больцмана, B_e – вращательная постоянная молекулы, $1/k_0$ – средний по полосе излучения молекулы пробег квантов; $Kn_r=1/k_0L$ – радиационное число Кнудсена, B – коэффициент Эйнштейна для поглощения.

3. Система уравнений (1.4) – (1.6), (2.2) для любого из параметров обладает интегралами в виде плоских синусоидальных волн:

$$(3.1)\qquad \rho(\mathbf{r},t),\ T(\mathbf{r},t),\ldots=[\rho^*,\ T^*,\ldots]\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}+knt)$$

Задавая вещественный волновой вектор $\mathbf{k}$, будем определять спектр частот $\omega=kn$ ($k=|\mathbf{k}|$) собственных колебаний среды. Такой подход соответствует постановке задачи о распространении начальных возмущений в среде [1, 4]. Для решения такой задачи необходимо пользоваться преобразованиями Фурье – Лапласа [4].

Приравнивая нулю определитель однородной системы, получающейся из (1.4) – (1.6), (2.2) при подстановке в них (3.1), получим дисперсионное соотношение в виде алгебраического уравнения для n:

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} n^4+n^3(X_1+X_2+X_3)+n^2(X_1X_2+X_1X_3+X_4+1)+\\ +n(X_1X_4+\gamma^{-1}X_2+X_3)+\gamma^{-1}(X_4+X_5)=0\end{gathered}$$

$$X_1=kX,\qquad X_2=k\gamma\,\mathrm{Pe}^{-1}+\frac{c_{v0}}{c_{V0}}R_c\frac{1}{k},\qquad X_3=\frac{1-R^*\alpha}{k}$$

$$(3.3)\qquad X_4=X_2X_3+\frac{\varepsilon_0R_c}{c_{V0}T_0k^2}\left(\frac{\alpha R^*}{2}+\frac{\sqrt{2\pi}}{8}R^*-R_c\frac{c_{v0}T_0}{\varepsilon_0}\right)$$

$$X_5=\alpha R^*\frac{\varepsilon_0R_c}{c_{V0}T_0k^2},\qquad \alpha=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\operatorname{arctg}(Kn_rk)}{Kn_rk}$$

В данном случае n – безразмерная комплексная фазовая скорость волны. Если из дисперсионного соотношения отыскивать волновой вектор $\mathbf{k}$ как функцию вещественной частоты ω (что соответствует постановке граничной задачи), то для $\mathbf{k}$ имеет место трансцендентное уравнение. В отличие от равновесно-излучающего газа [1] в данном случае характеристическое уравнение (3.2) на порядок выше, т. е. в общем случае в колебательно-неравновесной среде распространяется большее число различных типов волн. Из зависимости коэффициентов уравнения (3.2) от k следует, что процессы вязкости и теплопроводности существенны для малых и промежуточных длин волн, а процессы переноса излучения и релаксации – для волн, бóльших, чем характерная длина $L=c_0\tau_0$. Для того, чтобы среда была устойчива относительно возмущений любого из параметров, необходимо, чтобы все волны затухали со временем, т. е. $\operatorname{Re} n<0$. Легко показать, что все коэффициенты уравнения (3.2) положительны. Пользуясь критерием Рауса – Гурвица, получаем, что необходимым и достаточным условием устойчивости среды относительно всех типов волн является выполнение соотношения

$$(3.4)\qquad \begin{gathered}(X_1+X_2+X_3)(X_1X_2+X_1X_3+X_4+1)(X_1X_4+\gamma^{-1}X_2+X_3)-\\ -(X_1+X_2+X_3)^2(X_4+X_5)\gamma^{-1}-(X_1+X_4+\gamma^{-1}X_2+X_3)^2>0\end{gathered}$$

Если для простоты пренебречь вязкостью и теплопроводностью, то (3.4) обнаруживает, что среда может быть неустойчива для длинных волн, и наоборот, устойчива для коротких.

4. Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть в отсутствие вязкости и теплопроводности излучение также стремится к нулю, т. е. единственным диссипативным процессом является релаксация колебательной энергии молекул. Это соответствует тому, что $\mu_1=0$, $\mu_0=0$, $\varkappa=0$, $R^*=0$, $R_c=1$. Тогда уравнение (3.2) переходит в

$$n^3+n^2\frac{1}{k}\left(\frac{c_{v0}}{c_{V0}}+1\right)+n+\frac{1}{k}\left(\frac{c_{v0}}{c_{p0}}+1\right)=0 \tag{4.1}$$

Из условия (3.4) при этом следует, что все типы волн будут поглощаться в среде. В приближении, когда декремент затухания мал ($n_1\ll n_2$, $n=n_1+in_2$), решение уравнения (4.1) имеет вид

$$n_1=-\frac{1}{2}(\gamma-1)\left(\frac{c_{v0}}{c_{p0}}\right)k\left[k^2+\left(\frac{c_{v0}}{c_{V0}}+1\right)^2\right]^{-1}$$

$$n_2=\sqrt{1+\frac{2n_1}{k}\left(\frac{c_{v0}}{c_{V0}}+1\right)}$$

Здесь $2\pi n_1$ дает затухание волны за время $t=\tau_0\lambda/L=\lambda/c_0$ (λ – длина волны). Видно, что затухание стремится к нулю как для очень больших, так и для очень малых волновых чисел. Максимальное поглощение наблюдается на длине волны $\lambda=2\pi c_0\tau_0[1+c_{v0}/c_{V0}]^{-1}$; c_0n_2 – фазовая скорость соответствующей волны.

Благодаря тому что влияние излучения на газодинамические параметры среды в используемой системе уравнений осуществляется только посредством процесса релаксации, переход к предельному случаю «замороженных» колебаний ($\tau_c\to\infty$) и к случаю равновесного излучения ($\tau_c\to 0$) приводит к разделению уравнений газодинамики и уравнения для колебательной энергии. В обоих случаях в среде будут распространяться незатухающие звуковые волны, соответственно с «замороженной» ($\gamma={}^7/_5$) и равновесной скоростью. Колебательная энергия в первом случае экспоненциально стремится к нулю, пока полностью не перейдет в излучение, а во втором – стремится к равновесному значению.

В более общем случае присутствия релаксации и неравновесного излучения решение уравнения (3.2) выглядит громоздко (по-прежнему пренебрегаем вязкостью и теплопроводностью), однако в пределе длинных волн ($k\to 0$) можно считать, что $X_2, X_3\ll X_4, X_5$, и тогда можно записать приближенное выражение для n:

$$n=\pm i\left[\frac{1}{2}(X_4+1)\mp\sqrt{\frac{1}{4}(X_4+1)^2-\gamma^{-1}(X_4+X_5)}\right]^{1/2}$$

т. е. в пределе длинных волн затухание отсутствует (здесь подкоренное выражение положительно) и релаксации с излучением влияют лишь на скорость звуковой волны. Заметим, что еще один характерный масштаб задачи – средняя длина пробега излучения, которая входит через параметр α, – вообще говоря, слабо влияет на качественную сторону явления.

Таким образом, в случае учета колебательной неравновесности и излучения в среде может распространяться четыре модифицированных плоских гармонических волны по сравнению с тремя типами волн в обычном газе с вязкостью и теплопроводностью. Приведенное рассмотрение позволяет решить задачу Коши об эволюции произвольных малых начальных возмущений в рассматриваемой среде.

В заключение автор выражает благодарность В. И. Круглову, Ю. В. Ходыко и М. А. Ельяшевичу за внимание к работе и обсуждения.

Поступила 31 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокофьев В. А.* Развитие начальных возмущений в рассеивающем, излучающем, поглощающем вязком теплопроводном газе. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 6.
2. *Ельяшевич М. А., Круглов В. И., Ходыко Ю. В.* Вывод уравнения типа Бибермана – Холстейна для неравновесно-излучающего двухатомного газа. Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, вып. 2.
3. *Круглов В. И., Ходыко Ю. В.* Интегральное уравнение для плотности колебательной энергии двухатомных газов. Докл. АН БССР, 1975, т. 19, № 6.
4. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. М., «Наука», 1975.