$$C(\beta,\alpha)=\sqrt{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}|\sin 2\theta|^{1/2}\,d\theta$$

$$C(\theta_2,\theta_1)=C(\theta_3,\theta_2)=C(\theta_4,\theta_3)=C(\theta_1,\theta_4)=\frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma(3/2)}$$

После вычислений для полного потока получаем

$$I_0=5.81\,c_0a^{2/3}\gamma^{1/3}D^{2/3} \tag{18}$$

Следует отметить, что проведенный анализ справедлив в предположении существования точек натекания, которые могут и отсутствовать (например, [4]).

Авторы благодарят Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 10 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Натансон Г. Л.* Диффузионное осаждение аэрозолей на обтекаемом цилиндре при малых коэффициентах захвата. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 1.
2. *Friedlander S. K.* Mass and heat transfer to single spheres and cylinders at low Reynolds numbers. A. I. Ch. E. Journal, 1957, vol. 3, No. 1.
3. *Фукс Н. А., Стечкина И. Б.* К теории волокнистых аэрозольных фильтров. Докл. АН СССР, 1962, т. 47, № 5.
4. *Гупало Ю. П.* К теории фильтрации аэрозолей. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 6.
5. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
6. *Chwang A. T., Yao-Tsu Wu T.* Hydromechanics of law – Reynolds – number flow, pt 2. Singularity method for stokes flows. J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt 4.

---

УДК 533.6.01

# ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Л. Е. КАЛИХМАН, А. В. ПОТАПОВ

*(Москва)*

В теории пограничного слоя широко используются независимые переменные, позволяющие построить эффективные методы решения задач. Наиболее распространенными и общими являются переменные Дородницына в форме Лиза [1]. Эта форма объединяет преобразования, предложенные Дородницыным [2], Блазиусом [3] и Манглером – Степановым [4, 5]. Как известно, преобразование уравнений пограничного слоя к переменным Дородницына в форме Лиза приводит к обобщенной единой системе уравнений, описывающей плоские и осесимметричные течения газа. Ниже проводится аналогичное обобщение переменных Мизеса [6] и Крокко [7].

Система дифференциальных уравнений двумерного стационарного пограничного слоя с многокомпонентной диффузией и химическими реакциями в пренебрежении термодиффузией и в отсутствие объемных сил имеет вид [8]

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial i^*}{\partial x}+v_y\frac{\partial i^*}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{c_{pf}}\frac{\partial i^*}{\partial y}\right)+ \tag{2}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\eta-\frac{\lambda}{c_{pf}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{j=1}^{\sigma}\left(\rho D_j-\frac{\lambda}{c_{pf}}\right)(i_j-i_j^{\circ})\frac{\partial c_j}{\partial y}\right]$$

(3) $$\rho\left(v_x\frac{\partial c_j}{\partial x}+v_y\frac{\partial c_j}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_j\frac{\partial c_j}{\partial y}\right)+K_jm_j,\qquad j=1,2,\ldots,(\sigma-1)$$

(4) $$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x r^j)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y r^j)=0$$

Здесь $c_{pf}$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении газа замороженного состава; $i^*$ – полная энтальпия; $(i_j-i_j^\circ)$ – энтальпия единицы массы $j$-го компонента с учетом энергии образования; $D_j$ – эффективный коэффициент диффузии $j$-го компонента [9]; $K_jm_j$ – масса $j$-го компонента, образующаяся в единице объема в единицу времени за счет химических процессов; $r$ – радиус тела вращения; $j=0$ и $1$ для плоского и осесимметричного течений соответственно. Остальные обозначения общепринятые.

Возьмем обобщенные переменные Мизеса в виде

(5) $$s=\int\left(\frac{r}{L}\right)^{2j}dx,\qquad \psi=\psi(x,y)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\rho v_y\left(\frac{r}{L}\right)^j,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\rho v_x\left(\frac{r}{L}\right)^j$$

Здесь $\psi$ – функция тока, $L$ – масштаб линейных размеров.

Система дифференциальных уравнений после преобразования к независимым переменным (5) примет вид

(6) $$\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial s}=-\frac{\partial p}{\partial s}+\rho v_x\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\eta\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial\psi}\right)$$

(7) $$\rho v_x\frac{\partial i^*}{\partial s}=\rho v_x\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\lambda}{c_{pf}}\rho v_x\frac{\partial i^*}{\partial\psi}\right)+\rho v_x\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\eta\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\rho v_x\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)\right]+$$
$$+\rho v_x\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\sum_{j=1}^{n}\rho D_j\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}_j}\right)(i_j-i_j^\circ)\rho v_x\frac{\partial c_j}{\partial\psi}\right]$$

(8) $$\rho v_x\frac{\partial c_j}{\partial s}=\rho v_x\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\rho^2D_jv_x\frac{\partial c_j}{\partial\psi}\right)+K_jm_j\frac{dx}{ds},\qquad j=1,2,\ldots,(\sigma-1)$$

Близкие к (5) типы преобразований применялись в работах [10, 11] для однородного сжимаемого газа. Однако в отличие от [10] в переменных (5) не используется в полном объеме преобразование Манглера – Степанова. В работе [11] осуществлялось преобразование к «модифицированным переменным», которые ни в одном частном случае не вырождаются в переменные Мизеса.

В обобщенном преобразовании Крокко в качестве независимых переменных возьмем

(9) $$s=\int\left(\frac{r}{L}\right)^{2j}dx$$

и проекцию скорости $v_x$, а в качестве искомых функций

(10) $$\tau=\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\left(\frac{r}{L}\right)^{-j}$$

энтальпию смеси $i$ и массовые концентрации компонент $c_j$.

В результате дифференциальные уравнения пограничного слоя преобразуются к виду

(11) $$(1-\mathrm{Pr})\tau\frac{\partial\tau}{\partial v_x}\frac{\partial i}{\partial v_x}+\mathrm{Pr}\,\tau^2\left[\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial i}{\partial v_x}\right)+1\right]-\mathrm{Pr}\,\eta\rho v_x\frac{\partial i}{\partial s}+$$
$$+\mathrm{Pr}\,\eta\left(\frac{\partial i}{\partial v_x}+v_x\right)\frac{\partial p}{\partial s}+\mathrm{Pr}\,\tau\frac{\partial}{\partial v_x}\left[\sum_{j=1}^{\sigma}\frac{1}{\mathrm{Sc}_j}\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}_j}\right)(i_j-i_j^\circ)\tau\frac{\partial c_j}{\partial v_x}\right]=0$$

$$(12)\qquad \left(\frac{1}{\mathrm{Sc}_j}-1\right)\tau\frac{\partial\tau}{\partial v_x}\frac{\partial c_j}{\partial v_x}+\tau^2\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{1}{\mathrm{Sc}_j}\frac{\partial c_j}{\partial v_x}\right)-$$

$$-\eta\rho v_x\frac{\partial c_j}{\partial s}+\eta\frac{\partial c_j}{\partial v_x}\frac{\partial p}{\partial s}+\eta K_j m_j\frac{dx}{ds}=0,\qquad j=1,2,\ldots,(\sigma-1)$$

$$(13)\qquad v_x\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\eta\rho}{\tau}\right)+\frac{\partial^2\tau}{\partial v_x^2}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)=0$$

Полученные системы дифференциальных уравнений в форме (6) – (8) и (11) – (13) описывают единым образом плоские и осесимметричные течения многокомпонентного газа с химическими реакциями. Для нереагирующего газа ($K_j=0$) системы даже в общем случае не содержат переменную $r/L$. На основе указанных преобразований можно выполненные в переменных Мизеса или Крокко решения, относящиеся к плоскому потоку, использовать для получения простых решений в осесимметричном случае. Указанные преобразования предоставляют новые возможности в теории пограничного слоя и их применение может оказаться удобным при рассмотрении некоторых частных классов течений.

Поступила 20 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА


1. *Lees L.* Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, No. 4.
2. *Дородницын А. А.* Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
3. *Blasius H.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. und Phys., 1958, Bd 56.
4. *Степанов Е. И.* Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движений с осевой симметрией. ПММ, 1947, т. 9, вып. 1.
5. *Mangler W.* Zusammenhang zwischen ebenen und rotationsymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. ZAMM, 1948, Bd 28.
6. *Mises R.* Bemerkungen zur Hydrodynamik, 1927, vol. 7.
7. *Crocco L.* Sullo strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana. Rend. Math. Univ. Roma, 1941, vol. 5; Atti di Gidonia, 1939, vol. 17, No. 7.
8. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. Изд-во иностр. лит., 1962.
9. *Тирский Г. А.* Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 115, № 6.
10. *Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П.* Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
11. *Анкудинов А. Л.* О численном интегрировании уравнений пограничного слоя в переменных Мизеса. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.


---

УДК 533.6.011:535.21

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОМ, РЕЛАКСИРУЮЩЕМ, ИЗЛУЧАЮЩЕМ ДВУХАТОМНОМ ГАЗЕ

Л. В. КАТКОВСКИЙ

*(Минск)*

В задачах радиационной газодинамики, когда главным образом интересуются излучением движущегося газа, обычно пренебрегают влиянием излучения на параметры газового потока; в противном случае задача сильно усложняется. В [1] было изучено развитие начальных возмущений в рассеивающем, излучающем, поглощающем, вязком, теплопроводном газе при наличии локального термодинамического равновесия. Однако при пониженных давлениях ($p\sim10^{-4}-10^{-3}$ *ат*) и достаточно высоких температурах активных степеней свободы молекул ($T\sim(1\div3)\cdot10^3$ °K) распределение молекул по колебательным уровням может сильно отличаться от равновесного ввиду близости по порядку величины времени колебательной релаксации при