

**ДИФФУЗИЯ К ЦИЛИНДРУ В СЛУЧАЕ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ.
ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

А. Д. ПОЛЯНИН, Ю. Н. СЫСКОВ

(Москва)

Рассматривается стационарная конвективная диффузия растворенного в потоке вещества к поверхности цилиндра (необязательно кругового), обтекаемого вязкой жидкостью. Аналитическое решение в случае ламинарного обтекания цилиндра прямолинейным и однородным на бесконечности потоком получено в [1, 2]. Задачи с более сложной гидродинамикой рассмотрены в [3, 4].

В данной работе для произвольного двумерного гидродинамического обтекания получено приближенное аналитическое выражение диффузионного потока вещества на поверхность твердого цилиндра. Приведены формулы для расчета массообмена кругового цилиндра, находящегося в некоторых сдвиговых течениях вязкой несжимаемой жидкости.

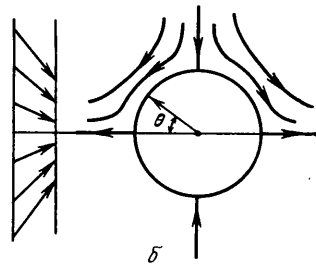
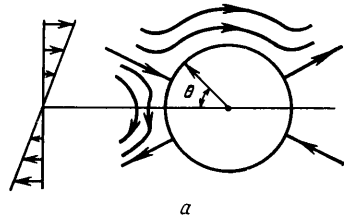
Рассмотрим задачу о распределении диффундирующего вещества и диффузионный поток на поверхность цилиндра, находящегося в произвольном потоке вязкой несжимаемой жидкости, в предположении, что на его поверхности происходит полное поглощение вещества, концентрация которого вдали от цилиндра постоянна.

Уравнение стационарной конвективной диффузии и граничные условия можно записать в виде

$$(1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2} \right]$$

$$c|_{r=R(\theta)}=0, \quad c|_{r=\infty}=c_0$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$



Здесь c — концентрация, $r=R(\theta)$ — уравнение поверхности цилиндра, v_r, v_θ — составляющие скорости жидкости, ψ — функция тока. Предположим, что число Пекле $P=aU/D \gg 1$ (D — коэффициент диффузии, a — характерный размер цилиндра, U — характерная скорость потока), тогда диффузионным переносом вещества вдоль поверхности цилиндра можно пренебречь по сравнению с переносом по нормали к ней.

Вблизи поверхности цилиндра функцию тока можно представить в виде

$$(2) \quad \psi = (r-R(\theta))^2 f(\theta),$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \Big|_{r=R(\theta)}$$

Переходя в диффузионном пограничном слое от переменных r, θ к переменным ψ, θ , сведем задачу (1) к следующей:

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial \theta} = -2DR \left(1 + \frac{R'^2}{R^2} \right) |f|^{1/2} \text{sign } f \frac{\partial}{\partial |\psi|} |\psi|^{1/2} \frac{\partial c}{\partial |\psi|}$$

$$(4) \quad c|_{\psi=0}=0, \quad c|_{|\psi| \rightarrow \infty} = c_0$$

Для завершения формулировки задачи в новых переменных необходимо добавить еще одно условие. Поток вещества вдоль траекторий, выходящих из бесконечности и заканчивающихся в некоторых точках поверхности цилиндра (траектории

натекания), максимально обогащен диффундирующим веществом. Поэтому концентрацию на траектории натекания надо положить равной концентрации на бесконечности, т. е. c_0 . Следует подчеркнуть, что такое условие носит предельный характер и должно выполняться при $P \rightarrow \infty$.

Рассмотрим подробнее локальную (в диффузионном пограничном слое) геометрию течения (фиг. 1). Нули функции $f(\theta)$ определяют области, в которых постояен знак функции тока. Определим углы θ_i^- и θ_i^+ следующим образом: $f(\theta_i^-) = 0$, $f_\theta'(\theta_i^-) < 0$ и $f(\theta_i^+) = 0$, $f_\theta'(\theta_i^+) > 0$. Тогда лучи, заданные θ_i^- , будут траекториями натекания, а θ_i^+ — траекториями вытекания. При этом в силу закона сохранения массы траектории натекания и вытекания будут чередоваться. Отсюда следует, что число корней у функции $f(\theta)$ четно. Для определенности предположим, что минимальный корень функции $f(\theta)$ соответствует траектории вытекания. Разлагая $f(\theta_i^+ + \theta)$ в ряд по θ , получаем, что в области $\theta_i^+ < \theta < \theta_i^-$ функция тока имеет отрицательный знак. Аналогично можно получить знаки функции тока между любыми другими корнями $f(\theta)$.

Рассмотрим области $\sigma_i = \{\theta_i^+ \leq \theta \leq \theta_{i+1}, r \geq R(\theta)\}$. В качестве дополнительного условия в σ_i имеем

$$(5) \quad c(\theta = \theta_i^-) = c_0$$

Введя новую переменную, сведем задачу (3) — (5) в области σ_i к следующей:

$$(6) \quad \frac{\partial c}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial |\psi|} |\psi|^{1/2} \frac{\partial c}{\partial |\psi|}$$

$$c|_{\psi=0} = 0, \quad c|_{|\psi| \rightarrow \infty} = c_0, \quad c|_{t_i=0} = c_0$$

$$t_i = -2D \operatorname{sign} f(\theta) A(\theta, \theta_i^-), \quad A(\beta, \alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} R \left(1 + \frac{R^2}{R^2} \right) |f|^{1/2} d\theta$$

Решение задачи (6) имеет вид [5]

$$(7) \quad c_i = c_0 \frac{(\zeta/\theta)^{1/3}}{\Gamma(\zeta/\theta)} \int_0^{\eta_i} \exp[-(\zeta/\theta)\eta^3] d\eta, \quad \eta_i = |\psi|^{1/2} t_i^{-1/3}$$

Формула (7) вместе с (2) и (6) описывает распределение концентрации около цилиндра. Диффузионный поток на цилиндр и толщина диффузионного пограничного слоя равны

$$(8) \quad j_i(\theta) = D \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{r=R(\theta)} =$$

$$= c_0 \frac{(\zeta/\theta)^{1/3}}{\Gamma(\zeta/\theta)} D^{2/3} |f(\theta)|^{1/2} A(\theta, \theta_i^-)^{-1/2} \frac{\sqrt{R^2(\theta) + R_\theta'^2(\theta)}}{R(\theta)}, \quad \delta = D c_0 |j_i|$$

Величина $\delta \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \theta_i^+$. Это означает, что в окрестности этих углов толщина диффузионного пограничного слоя не мала по сравнению с характерным размером цилиндра. Поэтому в окрестности указанных предельных значений θ использованный метод неприменим. Из (6), (8) видно, что эти окрестности тем меньше, чем больше число Пекле. Вклад этих областей в полный поток на цилиндр несуществен.

Полный поток получим интегрированием (8) по поверхности цилиндра

$$(9) \quad I = \sum_i \int_{\sigma_i} j_i d\sigma = \sum_i \int_{\theta_i^+}^{\theta_{i+1}} R(\theta) j_i(\theta) d\theta$$

Здесь функция $j_i(\theta)$ определена формулой (8). В случае кругового цилиндра радиуса a , полагая $R(\theta) = a$ и переобозначая корни функции $f(\theta)$ через θ_k , заумеровав их в порядке возрастания, из (9) получаем

$$(10) \quad I_0 = c_0 D^{2/3} \frac{(\zeta/\theta)^{1/3}}{\Gamma(\zeta/\theta)} \sum_{k=1}^N A^{2/3}(\theta_{k+1}, \theta_k)$$

где N — число корней функции $f(\theta)$, $\theta_1 = \theta_{N+1}$.

1°. Рассмотрим стационарную конвективную диффузию к поверхности закрепленного кругового цилиндра радиуса a , находящегося в сдвиговом течении (фигура, а). В прямоугольной декартовой системе координат, связанной с цилиндром, распределение скоростей набегающего потока на больших расстояниях от цилиндра имеет вид

$$(11) \quad v|_{r \rightarrow \infty} = \Omega y e_x, \quad (\Omega > 0)$$

Здесь e_x — единичный вектор, определяющий ось x . Для поля течения вокруг цилиндра, соответствующего условию на бесконечности (11), используем результат, полученный в стоксовом приближении в [6]

$$(12) \quad \psi = \Omega a^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{r}{a} \right\}$$

Используя (2) для функции $f(\theta)$, получаем

$$(13) \quad f(\theta) = -\frac{\Omega}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

Отсюда видно, что траекториями натекания являются лучи $\theta_1^- = 5\pi/6$ и $\theta_2^- = 11\pi/6$, а траекториями вытекания — лучи $\theta_1^+ = \pi/6$ и $\theta_2^+ = 7\pi/6$. Так как задача инвариантна относительно поворота на угол $\theta = \pi (\theta \rightarrow \theta + \pi)$, то достаточно рассмотреть ее в области $\sigma_2 = \{-5\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6\}$. Распределение концентрации будет задаваться (13), (6) и (7) с $R(\theta) = a$.

Используя (10), получим выражение для полного потока на поверхность цилиндра

$$I_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\Gamma(4/3)} c_0 a^{2/3} D^{2/3} \Omega^{1/3} \sum_{k=1}^4 B^{2/3}(\theta_{k+1}, \theta_k), \quad B(\beta, \alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} |1 - 4 \sin^2 \theta|^{1/2} d\theta$$

$$B(\theta_2, \theta_1) = B(\theta_4, \theta_3) = 4E \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - F \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$B(\theta_2, \theta_3) = B(\theta_1, \theta_4) = 4E \left(\frac{1}{2} \right) - 3F \left(\frac{1}{2} \right)$$

Здесь F и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Окончательно для полного потока получаем

$$(14) \quad I_0 = 5.44 c_0 a^{2/3} \Omega^{1/3} D^{2/3}$$

2°. Рассмотрим незакрепленный круглый цилиндр радиуса a , обтекаемый вязкой жидкостью, в случае установившегося сдвигового течения (фигура, б). В прямоугольной декартовой системе координат, связанной с цилиндром, распределение скоростей на больших расстояниях от него определяется по формуле

$$(15) \quad v|_{r \rightarrow \infty} = \gamma T r + o(1) \frac{r}{|r|}, \quad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Нетрудно показать, что для поля течения вокруг цилиндра, соответствующего условию (15) на бесконечности и условию прилипания на его поверхности, функция тока, записанная в цилиндрических координатах, в приближении Стокса имеет вид

$$(16) \quad \psi = \gamma a^2 \left(\frac{r^2}{2a^2} - 1 + \frac{a^2}{2r^2} \right) \sin 2\theta$$

Отсюда для функции $f(\theta)$ получаем

$$(17) \quad f(\theta) = 2\gamma \sin 2\theta$$

Видно, что траекториями натекания являются лучи $\theta_1^- = \pi/2$ и $\theta_2^- = 3\pi/2$, а траекториями вытекания — лучи $\theta_1^+ = 0$ и $\theta_2^+ = \pi$. Как и в 1°, надо положить $R(\theta) = a$, тогда распределение концентрации будет определяться из выражений (17), (6) и (7).

Полный поток на поверхность цилиндра, как следует из (10), будет равен

$$I_0 = \frac{(3/4)^{1/2}}{\Gamma(4/3)} c_0 a^{2/3} D^{2/3} \gamma^{1/3} \sum_{k=1}^4 C^{2/3}(\theta_{k+1}, \theta_k)$$

$$C(\beta, \alpha) = \sqrt{2} \int_{\alpha}^{\beta} |\sin 2\theta|^{1/2} d\theta$$

$$C(\theta_2, \theta_1) = C(\theta_3, \theta_2) = C(\theta_4, \theta_3) = C(\theta_1, \theta_4) = \frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma(3/2)}$$

После вычислений для полного потока получаем

$$(18) \quad I_0 = 5.81 c_0 a^{2/3} \nu^{1/3} D^{2/3}$$

Следует отметить, что проведенный анализ справедлив в предположении существования точек натекания, которые могут и отсутствовать (например, [4]).

Авторы благодарят Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 10 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагансон Г. Л. Диффузионное осаждение аэрозолей на обтекаемом цилиндре при малых коэффициентах захвата. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 1.
2. Friedlander S. K. Mass and heat transfer to single spheres and cylinders at low Reynolds numbers. A. I. Ch. E. Journal, 1957, vol. 3, No. 1.
3. Фукс Н. А., Стечкина И. Б. К теории волокнистых аэрозольных фильтров. Докл. АН СССР, 1962, т. 47, № 5.
4. Гупало Ю. П. К теории фильтрации аэрозолей. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 6.
5. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
6. Chwang A. T., Yao-Tsu Wu T. Hydromechanics of low - Reynolds - number flow, pt 2. Singularity method for stokes flows. J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt 4.

УДК 533.6.01

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Л. Е. КАЛИХМАН, А. В. ПОТАПОВ

(Москва)

В теории пограничного слоя широко используются независимые переменные, позволяющие построить эффективные методы решения задач. Наиболее распространенными и общими являются переменные Дородницына в форме Лиза [1]. Эта форма объединяет преобразования, предложенные Дородницким [2], Блазиусом [3] и Манглером - Степановым [4, 5]. Как известно, преобразование уравнений пограничного слоя к переменным Дородницына в форме Лиза приводит к обобщенной единой системе уравнений, описывающей плоские и осесимметричные течения газа. Ниже проводится аналогичное обобщение переменных Мизеса [6] и Крокко [7].

Система дифференциальных уравнений двумерного стационарного пограничного слоя с многокомпонентной диффузией и химическими реакциями в пренебрежении термодиффузией и в отсутствие объемных сил имеет вид [8]

$$(1) \quad \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$(2) \quad \rho \left(v_x \frac{\partial i^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial i^*}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_{pf}} \frac{\partial i^*}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\eta - \frac{\lambda}{c_{pf}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{j=1}^{\sigma} \left(\rho D_j - \frac{\lambda}{c_{pf}} \right) (i_j - i_j^0) \frac{\partial c_j}{\partial y} \right]$$