

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1976**

УДК 532.5.013.4 : 536.25 : 538.4

**О КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ
ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

В. А. САРАНИН

(Пермь)

В неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости (электропроводность $\sigma \sim 10^{-12} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$), помещенной в постоянное электрическое поле, в результате термической неоднородности электропроводности и диэлектрической проницаемости индуцируется объемный заряд. Возникающие пондеромоторные силы приводят жидкость в интенсивное движение [1-6]. Однако при определенных условиях оказывается возможным равновесие, и тогда можно поставить задачу о его устойчивости.

Теоретический анализ устойчивости равновесия жидкости в плоском горизонтальном конденсаторе проводился в работах [2, 4]. В [2] численно найдены критические параметры задачи для случая, когда архимедовы силы отсутствуют. Релаксация возмущений заряда считалась мгновенной. Показано, что неустойчивость имеет колебательный характер.

В [4] рассматривался только подогрев сверху. Основные результаты получены в предельном случае исчезающе малой температуропроводности жидкости (бесконечно большие числа Прандтля).

В данной работе в более общей постановке исследуется конвективная устойчивость равновесия вертикального слоя жидкости, подогреваемой снизу или сверху и помещенной в электрическое поле. В случае слоя со свободными теплоизолированными границами получено точное решение задачи. Определены величины критических чисел Рэлея и частоты нейтральных колебаний при подогреве снизу и сверху. Построены нейтральные кривые. Показано, что при подогреве снизу возможна неустойчивость как колебательного, так и монотонного типов, а при подогреве сверху неустойчивость имеет колебательный характер. Найдены величины безразмерного параметра поля, при которых происходит смена форм неустойчивости при подогреве снизу и становится возможной неустойчивость при подогреве сверху.

1. Рассмотрим несжимаемую неоднородно нагретую жидкость, находящуюся во внешнем постоянном однородном электрическом поле. Будем предполагать, что неоднородность температуры вызвана внешним подогревом. Джоулевым нагревом и индуцированным магнитным полем преенебрегаем в силу малой электропроводности жидкости. Будем считать также, что все параметры жидкости, кроме плотности, проводимости и диэлектрической проницаемости, не зависят от температуры. Закон проводимости предполагается омическим.

В сделанных предположениях система уравнений, описывающая конвекцию в электрическом поле, имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \gamma_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon - g \gamma_0 \beta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T &= \chi \Delta T \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}) &= 0, \quad \operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T), \quad \epsilon = \epsilon_0(1 + \beta_\epsilon T)$$

$$\beta_\sigma = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right), \quad \beta_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)$$

Здесь γ_0 — плотность жидкости, ρ — плотность заряда, остальные обозначения общепринятые. Давление p отсчитывается от среднего p_a , включающего в себя гидростатическую и струкционную части

$$(1.2) \quad \nabla p_a = \frac{1}{8\pi} \nabla \left(\gamma \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} E^2 \right) + \gamma_0 g$$

Будем далее предполагать [7], что $\beta_\epsilon T \ll \beta_\sigma T \ll 1$. Это позволяет учитывать в дальнейшем только линейные по $\beta_\sigma T$ члены, дающие основной вклад, и пренебречь изменением диэлектрической проницаемости с температурой.

Положив $v=0$ и применив операцию rot к первому из уравнений (1.1), получим общее условие равновесия: $E_0 \parallel \nabla T_0 \parallel g$. Для равновесных значений поля температуры и заряда находим из (1.1)

$$(1.3) \quad E_{0z} = -E_{00}(1 + \beta_\sigma A_0 z), \quad T_0 = -A_0 z, \quad \rho_0 = -\frac{\epsilon}{4\pi} E_{00} \beta_\sigma A_0$$

где E_{00} — напряженность поля в вакууме, ось z направлена вертикально вверх. Равновесное значение давления определяется соотношением

$$(1.4) \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = \gamma_0 T_0 g - \rho_0 E_{0z}$$

Рассмотрим малое возмущение равновесного состояния и обозначим отклонения температуры, давления, плотности заряда, поля от равновесных значений соответственно через T , p , ρ , ϵ , а скорость возникающего движения v . Линеаризуем систему (1.1) по малым возмущениям, выбирая в качестве единиц измерения расстояния — характерный размер полости L , поля E_{00} , времени L^2/v , скорости χ/L , давления $\gamma_0 v \chi / L^2$, температуры $A_0 L$, заряда $(\epsilon/4\pi) E_{00} \beta_\sigma A_0$, получим безразмерные уравнения возмущений

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + RT \mathbf{n} + RB \rho \mathbf{n} \\ P \frac{\partial T}{\partial t} - v_z &= \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ P \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho &= -\frac{\partial T}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \mathbf{e} = S \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \\ S &= \beta_\sigma A_0 L, \quad R = \frac{g \beta A_0 L^4}{v \chi} \\ P &= \frac{v}{\chi}, \quad P \tau = \frac{\epsilon v}{4\pi \sigma_0 L^2}, \quad B = \frac{\epsilon E_{00}^2 \beta_\sigma}{4\pi \gamma_0 g \beta L} \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор в направлении оси z .

В систему (1.5) входят четыре безразмерных параметра — число Рэлея R , число Прандтля P , параметр поля B и параметр релаксации $P\tau$. Параметр поля характеризует отношение кулоновских сил к архимедовым, а параметр релаксации — отношение времени релаксации к характерному времени развития гидродинамических возмущений и является электрическим аналогом числа Прандтля. В предельном случае мгновенной релак-

сации заряда ($P\tau=0$) система (1.5) переходит в уравнения, использовавшиеся в [2].

Следует заметить, что сохранение только линейных по $\beta_0 T$ членов означает в конечном итоге пренебрежение действием электрического поля индуцированного заряда по сравнению с действием внешнего поля. (Аналог безындукционного приближения в магнитной гидродинамике.)

2. Имея в виду получить точное решение задачи, рассмотрим устойчивость равновесия бесконечного плоского вертикального слоя жидкости со свободными теплоизолированными границами. При этом ограничимся рассмотрением двумерных возмущений, лежащих в плоскости xz . (Ось x направлена перпендикулярно границам.) Известно, что такие возмущения для данной задачи в отсутствие поля обладают наименьшей устойчивостью [8]. Так как границы плоские (недеформируемые), теплоизолированные и являются свободными поверхностями, то на них должны выполняться условия

$$(2.1) \quad v_x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm L)$$

$$(2.2) \quad n_k(\sigma_{ik} - \sigma_{ik}^{(m)}) + n_k(T_{ik} - T_{ik}^{(m)}) = 0$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

$$T_{ik} = \frac{\epsilon}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right) \quad (x = \pm L)$$

Здесь $\sigma_{ik}, \sigma_{ik}^{(m)}$ — тензоры напряжений в жидкости и массиве, $T_{ik}, T_{ik}^{(m)}$ — тензоры максвелловских напряжений. Пренебрегая движением в массиве, а также учитывая предположение о недеформируемости границ, спроектируем уравнение (2.2) на ось z и линеаризуем по возмущениям поля. Это дает

$$(2.3) \quad \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = -E_{00} (\epsilon e_x - \epsilon_m e_{xm}) \quad (x = \pm L)$$

Границные условия для возмущений поля получаются из требований непрерывности нормальной (к границам) составляющей полного тока и касательной составляющей поля

$$(2.4) \quad (\sigma_0 e_x - \sigma_m e_{xm}) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon e_x - \epsilon_m e_{xm}) = 0$$

$$e_z = e_{zm}, \quad (x = \pm L)$$

Предполагается, что равновесное поле в массиве удовлетворяет условию на границах слоя $E_{0z} = E_{zm}$. С целью отделения гидродинамической и электрической частей задачи (что значительно упростит ее решение) исключим поле из граничного условия (2.3). Для этого заметим, что из уравнений (1.5) и граничных условий (2.1) следует:

$$\Delta_1 e_x = 0, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (x = \pm L)$$

Применение оператора Δ_1 к первому уравнению (2.4) с последующим рассмотрением его на границе дает $\Delta_1 e_{xm} = 0$ при $x = \pm L$. Проделывая аналогичные преобразования с (2.3) и учитывая последние два соотношения, получим

$$(2.5) \quad \Delta_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0 \quad (x = \pm L)$$

В безразмерной форме уравнение (2.5) сохраняет свой вид и выполняется при $x=\pm 1$.

Таким образом, гидродинамическая часть задачи, определенная первыми четырьмя уравнениями системы (1.5) и граничными условиями (2.1), (2.5), теперь уже не содержит возмущений поля и может быть рассмотрена отдельно.

Введем функцию тока ψ , определив ее соотношениями $\partial\psi/\partial x=v_z$, $\partial\psi/\partial z=-v_x$. Решение будем искать в форме $(\psi, T, \rho) \sim \exp\{-\lambda t + ikx\}$. Для амплитуд нормальных возмущений из первых четырех уравнений (1.5) получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} -\lambda(D^2-k^2)\psi-(D^2-k^2)^2\psi+RDT+RBD\rho &= 0 \\ -\lambda PT-(D^2-k^2)T+D\psi &= 0 \\ -(\lambda P\tau-1)\rho+ikT &= 0, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Граничные условия для амплитуд функции тока и температуры имеют вид

$$(2.7) \quad \psi=DT=0, \quad D^2(D^2-k^2)\psi=0 \quad (x=\pm 1)$$

Второе условие (2.7) можно упростить. Действительно, как следует из последнего уравнения системы (2.6), на границе $D\rho=0$. Тогда из первого уравнения (2.6) получим на границе $(-\lambda+k^2)D^2\psi=0$, откуда

$$(2.8) \quad D^2\psi=0 \quad (x=\pm 1)$$

Сформулированная амплитудная задача (2.5), (2.6), (2.8) имеет точное решение четного и нечетного типа

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \psi &= A_1 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad T = B_1 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad \rho = C_1 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \\ (n &= 2, 4, 6, \dots) \\ \psi &= A_1 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad T = B_1 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad \rho = C_1 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \\ (n &= 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

После подстановки (2.9) в систему (2.6) получим однородную систему алгебраических уравнений для постоянных A_1 , B_1 и C_1 , условие разрешимости которой приводит к кубическому уравнению для декремента λ

$$(2.10) \quad a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d_0+id_1=0$$

$$a=-PP\tau N^2, \quad N^2=k^2+m^2, \quad m=\frac{\pi n}{2}$$

$$b=N^4P\tau+PP\tau N^4+N^2P$$

$$c=-(N^4+N^4P+N^6P\tau-P\tau m^2R)$$

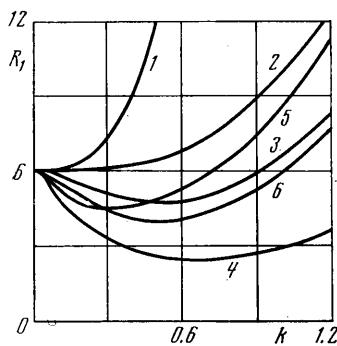
$$d_0=N^6-Rm^2, \quad d_1=RBm^2k$$

На границе устойчивости действительная часть декремента обращается в нуль, поэтому $\lambda=i\omega$. После разделения действительной и мнимой частей уравнения (2.10) получим

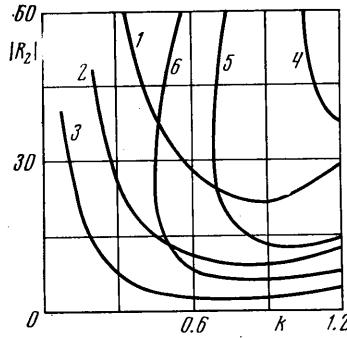
$$(2.11) \quad -b\omega^2+d_0=0, \quad \omega(-a\omega^2+c)+d_1=0$$

Из (2.14) и (2.10) видно, что монотонные режимы срыва устойчивости отвечают лишь одному из предельных случаев $B=0$ (поле отсутствует), либо $k=0$ (плоскопараллельные возмущения).

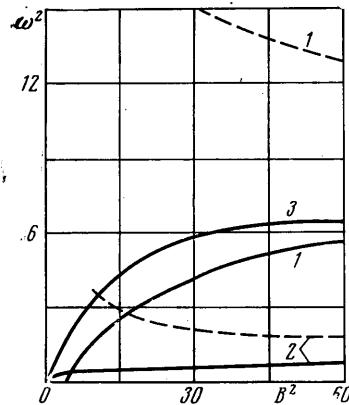
Система (2.11) определяет спектр критических чисел Рэлея и частоты нейтральных колебаний в зависимости от волнового числа k и параметров $B, P, P\tau$.



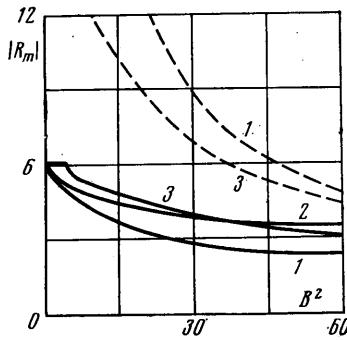
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

3. В случае мгновенной релаксации заряда $P\tau=0$, после несложных преобразований (2.11) с учетом (2.10) для критических чисел Рэлея получаем квадратное уравнение

$$(3.1) \quad R^2 + \frac{R_0}{k^2 h} R - \frac{R_0^2}{k^2 h} = 0, \quad h = \frac{B^2 P}{(1+P)^2}$$

где $R_0 = N^6/m^2$ — спектр критических чисел Рэлея в отсутствие поля [8]. Уравнение (3.1) имеет положительный R_1 и один отрицательный R_2 корни, характеризующие порог устойчивости при подогреве снизу и сверху соответственно. Поскольку в (2.11) $(c-ad_0/b) < 0$, то легко показать, что для частот нейтральных колебаний $\text{sign}(\omega) = \text{sign}(R)$ и

$$\omega_i = \frac{N^2 k \sqrt{h}}{\sqrt{P}} \frac{R_i}{R_0} \quad (i=1, 2)$$

Это означает, что фазовая скорость возмущений $v_\phi = \omega/k$ при $R > 0$ положительна, т. е. возмущения распространяются снизу вверх, а при $R < 0$ отрицательна, возмущения распространяются сверху вниз. Таким образом, в любом случае возмущения, срывающие устойчивость, распространяются от более горячего конца канала. Аналогичный характер поведения возмущений зафиксирован экспериментально в горизонтальном слое [3].

Минимизация R_1 и R_2 по волновому числу k дает следующие результаты.

Если напряженность поля достаточно мала, так что $h < 3/m^2$, то минимальным значениям критических чисел Рэлея при подогреве снизу соответствует волновое число $k_m = 0$. Это говорит о плоскопараллельности возмущений. При этом для спектра минимальных критических чисел Рэлея имеем те же значения, что и в отсутствие поля [6]. Частота нейтральных колебаний также обращается в нуль, т. е. в данном случае наиболее опасные возмущения монотонны. Нейтральные кривые для этого случая представлены на фиг. 1 (кривые 1 и 2, соответствующие $B=0$ и 2.2). Число Прандтля $P=1$. Все графики относятся к нижнему уровню неустойчивости $n=1$.

С увеличением поля (параметра h) ситуация при подогреве снизу меняется. При $h > 3/m^2$ волновое число наиболее опасных возмущений зависит от поля и определяется следующей формулой со знаком минус перед радикалом:

$$(3.2) \quad k_{1,2m} = \left(\frac{5m^2h - 3 \mp 3\sqrt{1+5m^2h}}{25h} \right)^{1/2}$$

Возмущения имеют форму валов, вытянутых вдоль оси y и носят колебательный характер: $\omega_{im} \neq 0$. Значения параметра поля, отвечающие переходу к такому типу наиболее опасных возмущений, определяются из условия $h = 3/m^2$ и равны

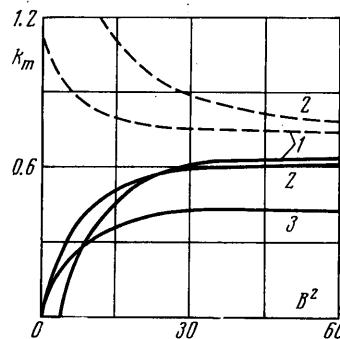
$$(3.3) \quad B_* = \frac{2\sqrt{3}}{\pi n} \frac{(1+P)}{\sqrt{P}}$$

Соответствующие нейтральные кривые 3 и 4 (фиг. 1) построены для $B=4$ и 10, $P=1$.

При подогреве сверху неустойчивость всегда имеет колебательный характер, наиболее опасные возмущения имеют волновое число k_{2m} , определенное (3.2) с нижним знаком плюс. Нейтральные кривые для $P=1$ представлены на фиг. 2 (кривые 1, 2, 3 соответствуют $B=2.2, 4, 10$). Как следует из приведенных результатов, волновые числа наиболее опасных возмущений с изменением поля меняются для подогрева снизу и сверху соответственно в пределах

$$0 \leq k_{1m} < \frac{n\pi}{2\sqrt{5}}, \quad \frac{n\pi}{2\sqrt{5}} < k_{2m} \leq \frac{n\pi}{2\sqrt{2}}$$

Зависимость квадрата частоты нейтральных колебаний в точках минимума числа Рэлея от величины параметра поля представлена на фиг. 3, кривые 1 (сплошная кривая — подогрев снизу, штриховая — сверху, $P=1$). С увеличением поля частоты асимптотически стремятся к одному и тому же значению: $|\omega_\infty| = 3\pi^2/\sqrt{P}$.



Фиг. 5

4. В случае произвольных времен релаксации вместо (2.11) имеем

$$(4.1) \quad \omega^2 = \frac{(R_0 - R)m^2}{(N^4 P \tau + N^4 P P \tau + N^2 P)} \\ P P \tau \omega^3 - \omega (N^4 + N^4 P + N^6 P \tau - P \tau m^2 R) + R B m^2 k = 0$$

Исключив из этой системы ω , после несложных преобразований получим для критических чисел Рэлея следующее уравнение:

$$(4.2) \quad R^3 + R^2 (M Q^3 - 2Q - 3R_0) + \\ + R (3R_0^2 + Q^2 + 4R_0 Q) - R_0 (R_0 + Q)^2 = 0 \\ M = \frac{B^2 k^2 P \tau^2 m^4}{N^8 (1+P)^2}, \quad Q = \frac{1}{m^2 P \tau^2} (N^4 P \tau + N^4 P P \tau + N^2 P)$$

Нейтральные кривые, построенные по результатам численного решения уравнения (4.2) для каждого фиксированного k , представлены на фиг. 1 (кривые 5, 6 — подогрев снизу) и фиг. 2 (кривые 4, 5, 6 — подогрев сверху). Кривые 5 и 6 на фиг. 1 построены для одного и того же значения параметра поля $B = \sqrt{10}$ и числа Прандтля $P = 1$, но разных параметров релаксации: $P \tau = 10$ и 1 соответственно. На фиг. 2 кривым 4, 5, 6 соответствуют $P = P \tau = 1$ и $B = \sqrt{10}, \sqrt{20}, \sqrt{40}$. При $P \tau \neq 0$ нейтральные кривые, отвечающие возникновению неустойчивости при подогреве сверху (фиг. 2), имеют минимум не только по числу Рэлея, но и по волновому числу k . Величина минимального волнового числа, при котором неустойчивость при подогреве сверху еще возможна, зависит от параметров B , P , $P \tau$ и определяется из условия равенства нулю дискриминанта уравнения (4.2). Вычисляя дискриминант и полагая, например $k \rightarrow \infty$, получим

$$B_{2m} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{P \tau}{(1+P)}}$$

Это означает, что неустойчивость при подогреве сверху возможна, если только величина поля такова, что $B > B_{2m}$.

Для определения величины параметра поля, при которой происходит смена форм неустойчивости при подогреве снизу, все величины в уравнении (4.2) разложим в ряд по степеням k^2 (коэффициенты уравнения не содержат линейных степеней k). Несложные преобразования приводят к следующему разложению критических чисел Рэлея:

$$R = \pi^4 m^4 + k^2 \left(3m^2 - \frac{B^2 (m^2 P \tau + P P \tau m^2 + P)}{(1+P)^2} \right) + \dots$$

Из условия смены знака у квадратичной поправки находим искомые значения параметра поля

$$(4.3) \quad B_* = \frac{\sqrt{3}(1+P)}{m(m^2 P \tau + m^2 P P \tau + P)^{1/2}}$$

При $P \tau = 0$ последнее соотношение, как и следовало ожидать, переходит в (3.3).

Зависимость модуля минимальных критических чисел Рэлея от величины B^2 , пропорциональной четвертой степени поля, представлена на фиг. 4. Кривые 1, 2, 3 соответствуют параметрам релаксации $P \tau = 1, 10, 0$ (Сплошные линии — подогрев снизу, штриховые — сверху.) На фиг. 5 представлена аналогичная зависимость для волновых чисел наиболее-

опасных возмущений. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $P\tau=0, 1, 10$. Представленные на фиг. 3 зависимости частот нейтральных колебаний от величины поля отвечают $P\tau=1$ (кривые 2) и $P\tau=10$ (кривая 3). Число Прандтля всюду выбиралось равным единице.

Таким образом, имеются два механизма, приводящие к неустойчивости равновесия слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Первый из этих механизмов, рэлеевский, работает лишь при подогреве снизу и при полях, меньших чем определенные формулами (3.3), (4.3), является доминирующим. Второй механизм, приводящий к неустойчивости колебательного типа как при подогреве сверху, так и снизу, обусловлен неустойчивым распределением объемного заряда. Этот механизм, доминирующий в достаточно сильном поле, является кулоновским. Кулоновский механизм может приводить к неустойчивости равновесия жидкости и в отсутствие гравитационных сил.

В заключение автор благодарит Е. М. Жуховицкого за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г. А. Некоторые гидродинамические явления, сопровождающие прохождение тока через изолирующие жидкости. ЖЭТФ, 1956, т. 30, вып. 2.
2. Бологое М. К., Бурштейн И. Ф., Гросу Ф. П. Неустойчивость термически неоднородного слоя слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
3. Turnbull R. J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. I. Experimental results. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 12.
4. Turnbull R. J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. I. Theory. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 12.
5. Байбулатов Ф. Х., Минин В. Ф., Смирнов А. В. О теплообмене в диэлектрической жидкости. ПМТФ, 1972, № 1.
6. Мельчер Дж. Р. Электродинамика. Магнитная гидродинамика, 1974, № 2.
7. Сканави Г. И. Физика диэлектриков (область слабых полей). М.-Л., Гостехиздат, 1949.
8. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.