Используя разобранные примеры, можно рассмотреть случаи, являющиеся их комбинациями. Так, синусоидальный («волнистый») в момент t_0 фронт на плоскости xy приводит при $t\to\infty$ к пилообразному профилю $\eta(\xi')$, который состоит из бесконечного числа участков, аналогичных изображенному на фиг. 3.

Согласно вышесказанному скачки затухают как t^{-1}. На плоскости xy пилообразному профилю соответствует фронт, состоящий из бесконечного числа участков типа $A_0A_1A_2A_3$ фиг. 4. Соседние участки в граничных точках (точки A_0, A_3) имеют общую касательную. Каждый из бесконечного числа участков движется так же, как участок $A_0A_1A_2A_3$ (фиг. 4).

Автор благодарит А. Г. Куликовского за внимание к работе и ценные советы при подготовке рукописи к печати и А. А. Бармина, прочитавшего рукопись и сделавшего полезные замечания.

Поступила 24 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitham G. B.* A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pt 2.
2. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth, pt 1. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, pt 3.
3. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth, pt 2. J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, pt 3.
4. *Реутов В. А.* Движение уединенной волны над подводным хребтом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
6. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws II. Communs Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, No. 4.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.

УДК 532.594.013.4

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ НЕРАСТВОРИМОЙ ПЛЕНКИ

В. С. КИРЧАНОВ, В. Г. НЕВОЛИН

(Пермь)

Присутствие пленки поверхностно-активных веществ приводит к изменению силы, действующей на поверхность. Это изменение не сводится к простому снижению поверхностного натяжения α, а связано с появлением тангенциальных сил, действующих на свободную поверхность жидкости [1].

В работе рассматривается устойчивость свободной поверхности жидкости с пленкой поверхностно-активного вещества в переменном поле тяжести. Задача решается в линейной постановке. Решение ищется в виде ряда по степеням малой вязкости методом преобразований Лапласа по времени и Фурье – по переменным x и y (плоскость xy совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости).

Для смещения поверхности от положения равновесия получено интегродифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами, решение которого ищется методом усреднения [2]. Показано, что возбуждение носит пороговый характер. Наличие порога связано с тем, что энергия возбуждения должна быть не меньше энергии, диссипируемой в системе. Показано, что наличие рассматриваемой пленки существенно повышает порог неустойчивости.

1. Рассматривается слой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины с плоской свободной поверхностью, покрытой нерастворимой пленкой поверхностно-активного вещества. Слой совершает колебания вдоль вертикальной оси z по закону $a\cos\omega t$.

Уравнения движения системы запишутся [3]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{v}+(1+b\cos\omega t)\mathbf{g},\qquad \nabla\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}=(u,\ v,\ w)$ – вектор скорости, p – давление, $\mathbf{g}=(0,\ 0,\ -g)$ – ускорение силы тяжести, ν – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность жидкости, $b=a\omega^2/g$ – безразмерная амплитуда модуляции, $\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$.

При деформации поверхности, связанной с движением жидкости, происходит «растяжение» или «сжатие» пленки, что приводит к изменению концентрации поверхностно-активного вещества. В результате этого появляются дополнительные силы, которые должны быть учтены в граничных условиях, имеющих место на свободной поверхности [1, 3]

$$\left[p-\alpha(\Gamma)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]n_i=\nu\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)n_k+\frac{\partial\alpha(\Gamma)}{\partial\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i} \tag{1.2}$$

Здесь α – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности, R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхности, Γ – поверхностная плотность поверхностно-активного вещества. К этим уравнениям необходимо добавить уравнение неразрывности, выражающее неизменность общего количества вещества в пленке [1], и кинематическое условие, связывающее смещение поверхности от положения равновесия ζ со скоростью на поверхности жидкости

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\Gamma)+\frac{\partial}{\partial y}(v\Gamma)=D\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2}\right) \tag{1.3}$$

$$w=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y} \tag{1.4}$$

где D – коэффициент поверхностной диффузии, u и v берутся на поверхности жидкости.

2. Исследуем устойчивость равновесия слоя жидкости. Его равновесное состояние характеризуется следующим распределением невозмущенных величин (индекс 0):

$$\mathbf{v}_0=0,\quad \zeta_0=0,\quad \Gamma_0=\text{const},\quad p_0=-\rho g(1+b\cos\omega t)z \tag{2.1}$$

Здесь p отсчитывается от давления на поверхности.

Для исследования устойчивости равновесия системы внесем обычным образом возмущения скорости, давления и концентрации вещества. Выбирая в качестве единиц измерения длины, времени, частоты, скорости, давления и концентрации соответственно $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, $(\alpha/\rho g^3)^{1/4}$, $(\rho g^3/\alpha)^{1/4}$, $(\alpha g/\rho)^{1/4}$, $(\alpha\rho g)^{1/2}$, Γ_0, получим для возмущений следующую линеаризованную систему уравнений:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p+\frac{1}{A}\nabla^2\mathbf{v},\qquad \nabla\mathbf{v}=0,\qquad A\equiv\frac{1}{\nu}(\alpha^3/g\rho^3)^{1/4},\qquad \alpha\equiv\alpha(\Gamma_0) \tag{2.2}$$

Считая ζ малым, имеем при $z=0$ вместо (1.2) – (1.4)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=w,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\eta\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+Al\frac{\partial\Gamma}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+Al\frac{\partial\Gamma}{\partial y}=0\\ p=\left[1-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+b\cos\omega t\right]\zeta+\frac{2}{A}\frac{\partial w}{\partial z},\\ l\equiv\frac{\Gamma_0}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\Gamma}\right),\qquad \eta\equiv D\left(\frac{\rho^3 g}{\alpha^3}\right)^{1/4}\end{gathered} \tag{2.3}$$

При $z\to-\infty$ имеем $\mathbf{v}\to0$.

Совершая преобразования Фурье по переменным x, y и преобразования Лапласа по времени t и учитывая, что $\mathbf{v}(0)=0$, $\zeta(0)=0$, $\Gamma(0)=0$ и $\mathbf{v}\to0$ при $z\to-\infty$, можно записать вместо (2.2), (2.3) следующее:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^2W(s)-As\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)W(s)=0,\qquad k^2\equiv k_x^2+k_y^2 \tag{2.4}$$

При $z=0$ имеем

$$s\xi(s)=W(s),\qquad sL(s)+\eta k^2L(s)=\frac{dW(s)}{dz}$$

(2.5) $$\frac{d^2W(s)}{dz^2}+k^2W(s)+Alk^2L(s)=0$$

(2.6) $$\left[\frac{s}{k^2}-\frac{1}{Ak^2}\left(\frac{d^2}{dz^2}-3k^2\right)\right]\frac{dW(s)}{dz}+(1+k^2)\xi(s)+$$
$$+\frac{b}{2}[\xi(s+i\omega)+\xi(s-i\omega)]=0$$

где $W(s)$, $\xi(s)$ и $L(s)$ – трансформы Лапласа величин $w(t)$, $\zeta(t)$ и $\Gamma(t)$.

При $z\to-\infty$ имеем

(2.7) $$W(s)\to 0,\qquad \frac{dW(s)}{dz}\to 0$$

Решая уравнения (2.4) с учетом условий на бесконечности (2.7) и на поверхности (2.5), получим для $W(s)$

(2.8) $$W(s)=s\left\{e^{kz}+\frac{k^2(2+k\beta)(e^{kz}-e^{\sqrt{k^2+As}\,z})}{A[s+k^2\beta(\sqrt{k^2+As}-k)]}\right\}\xi(s)$$

где $\beta=l/(s+k^2\eta)$.

Подставляя (2.8) в уравнение (2.6), получим для $\xi(s)$

$$\left(s^2+\frac{2k^2s}{A}\right)\xi(s)+\frac{s(2+k^2\beta A)(sA+2k^2-2k\sqrt{k^2+As})k^2\xi(s)}{A^2[s+k^2\beta(\sqrt{k^2+As}-k)]}+$$
$$+\Omega_0^2\xi(s)+\frac{q}{2}[\xi(s+i\omega)+\xi(s-i\omega)]=0$$

Совершая обратное преобразование Лапласа и ограничиваясь членами порядка $1/A$, $l/(A)^{1/2}$, получим в нулевом по η приближении следующее уравнение для $\zeta(t)$:

(2.9) $$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+2\delta\frac{d\zeta}{dt}+(\Omega_0^2+q\cos\omega t)\zeta=\varepsilon\int_0^t\frac{\zeta(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}$$

$$(\delta=2k^2/A,\quad \Omega_0^2=k+(1+l)k^3,\quad q=bk,\quad \varepsilon=4k^4l/A^{1/2})$$

Сделав замену $X(t)=\zeta(t)\exp(-\delta t)$, перепишем (2.9) в виде

(2.10) $$\frac{dX}{dt}=U,\qquad \frac{dU}{dt}+(\Omega_0^2+q\cos\omega t)X=\varepsilon\int_0^t\frac{X(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}$$

Будем исследовать решение этой системы уравнений в окрестности первой области неустойчивости, т. е. вблизи $\Omega_0^2=\omega^2/4$, что соответствует основному резонансу [4]. Для этого сделаем замену $\Omega_0^2=\omega^2/4+\gamma$, где $\gamma\ll 1$.

Решение системы (2.10) будем искать в виде

$$X(t)=c_1(t)\cos\frac{\omega t}{2}+c_2(t)\sin\frac{\omega t}{2},$$

$$U(t)=-\frac{c_1(t)\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}+\frac{c_2(t)\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2}$$

Подставляя его в (2.10), получим систему уравнений для $\dot c_1$, $\dot c_2$

$$\dot c_1=\frac{2}{\omega}(\gamma+q\cos\omega t)\left(c_1\cos\frac{\omega t}{2}+c_2\sin\frac{\omega t}{2}\right)\sin\frac{\omega t}{2}-$$
$$-\frac{2\varepsilon}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\int_0^t\left[c_1\cos\frac{\omega(t-\tau)}{2}+c_2\sin\frac{\omega(t-\tau)}{2}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}$$

$$\dot{c}_2 = -\frac{2}{\omega}(\gamma+q\cos\omega t)\left(c_1\cos\frac{\omega t}{2}+c_2\sin\frac{\omega t}{2}\right)\cos\frac{\omega t}{2}+ \tag{2.11}$$

$$+\frac{2\varepsilon}{\omega}\cos\frac{\omega t}{2}\int_0^t\left[c_1\cos\frac{\omega(t-\tau)}{2}+c_2\sin\frac{\omega(t-\tau)}{2}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}$$

Усредняя эту систему по второй схеме [2], получим

$$\dot{c}_1=\frac{\varepsilon c_1}{\omega^{3/2}}+\left(\frac{\gamma}{\omega}-\frac{\varepsilon}{\omega^{3/2}}-\frac{q}{2\omega}\right)c_2,\qquad \dot{c}_2=-\left(\frac{\gamma}{\omega}-\frac{\varepsilon}{\omega^{3/2}}+\frac{q}{2\omega}\right)c_1-\frac{\varepsilon c_2}{\omega^{3/2}} \tag{2.12}$$

Как обычно, ищем частное решение этой системы в виде $c_1=Me^{\sigma t}$, $c_2=Ne^{\sigma t}$, где M, N и σ – постоянные. Из (2.12) получаем

$$\sigma_{1,2}=-\frac{\varepsilon}{\omega^{3/2}}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4\omega^2}-\left(\frac{\gamma}{\omega}-\frac{\varepsilon}{\omega^{3/2}}\right)^2} \tag{2.13}$$

Тогда для границ области устойчивости (неустойчивости) получаем следующее уравнение:

$$\frac{b^2k^2}{4\omega^2(\delta+\varepsilon/\omega^{3/2})^2}-\frac{(\Omega_0^2-\omega^2/4-\varepsilon/\omega^{1/2})^2}{\omega^2(\delta+\varepsilon/\omega^{3/2})^2}=1 \tag{2.14}$$

Отсюда видим, что на поверхности жидкости возникают параметрические волны с частотой $\omega/2$ и волновым числом k при

$$b\geqslant b_*=\frac{4k}{A}\omega+\frac{8k^3l}{\sqrt{A\omega}} \tag{2.15}$$

Из условия $\partial b/\partial k=0$ получим для волнового числа наиболее опасных (легко возбуждаемых) возмущений следующее уравнение:

$$k^3(1+l)+k=\omega^2/4+4k^4l/(A\omega)^{1/2}$$

решая которое разложением в ряд по l, получим

$$k=k_0+\frac{k_0l}{3}\left(\frac{4k_0}{\sqrt{A\omega}}-1\right), \tag{2.16}$$

$$k_0=\left(\frac{\omega^2}{8}+\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{\omega^4}{64}}\right)^{1/3}+\left(\frac{\omega^2}{8}-\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{\omega^4}{64}}\right)^{1/3}.$$

Отсюда порог возбуждения для наиболее опасных возмущений равен

$$b_*(k_0)=\frac{2l\omega^{3/2}}{\sqrt{A}}+\frac{4k_0}{\sqrt{A\omega}}\left(\frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{A}}-2l\right) \tag{2.17}$$

Для свободной поверхности без пленки ($l=0$) имеем $b_*(k_0)=(4k_0/A)\omega$.

Таким образом, пленка поверхностно-активного вещества значительно повышает порог неустойчивости.

В заключение авторы благодарят Г. З. Гершуни, который обратил их внимание на эту задачу.

Поступила 4 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика, гл. 9. М., Изд-во АН СССР, 1952.
2. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент. «Фан», 1971, стр. 95.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред, гл. 2. М.– Л., Гостехтеоретиздат, 1944.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, гл. 16. М., «Наука», 1967.