

3. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6.

УДК 532.59

### О ПОВЕДЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ УЕДИНЕННОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. РЕУТОВ

(Москва)

В случае потенциального движения идеальной несжимаемой однородной жидкости в [1] получена система, описывающая распространение цуга волн в среде с медленно меняющимися свойствами, причем движение в цуге характеризуется волновым вектором и частотой.

Частным случаем цуга, когда длина волн в цуге велика, является уединенная волна. В [2, 3] получена квазилинейная система уравнений в частных производных, описывающая двумерное и трехмерное движение уединенной волны в слое жидкости переменной глубины. Из этой системы следует, что если невозмущенное состояние жидкости — состояние покоя, то некоторая интегральная величина (средневолновая энергия [2-4]), отнесенная к элементу фронта, сохраняется в процессе движения. Этот факт справедлив и для цуга волн, что можно показать, применив формализм [1] к лагранжиану, аналогичному использованному в [2].

В данной работе в случае слоя жидкости постоянной глубины находится решение в виде простых волн для системы, эквивалентной системе, полученной в [3], и описывающей движение уединенной волны и цуга волн.

Показано, что возможно опрокидывание простых волн, которое в данном случае приводит к образованию угловых точек на фронте волны. Рассмотрено несколько примеров начальных возмущений и найдена их асимптотика при  $t \rightarrow \infty$ .

Изложение ведется на примере уединенной волны, однако в силу вышесказанного результаты автоматически переносятся на случай цуга волн.

**1. Простые волны.** В предположениях [3, 4] движение каждого малого криволинейного участка фронта уединенной волны мало отличается от движения в плоской волне. Поэтому движение волны в слое жидкости постоянной глубины можно описать функцией  $\theta(x, y, t)$  фазой волны. В разные моменты времени  $t$  уравнение  $\theta(x, y, t) = 0$  соответствует гребню волны (в случае цуга гребням волн соответствуют значения  $\theta(x, y, t) = 2\pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и задает на плоскости  $xy$  семейство линий фронта. Две близкие кривые из однопараметрического семейства кривых  $\xi = \text{const}$ , ортогональных семейству фронтов, выделяют из него элемент фронта в различные моменты времени. Если зафиксировать один из элементов, при  $t = 0$ , то остальные (при  $t \neq 0$ ) — его образы.

Пусть  $\mathbf{k} = \text{grad } \theta$  — волновой вектор,  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $c = -k^{-1}(\partial\theta/\partial t)$  — скорость волны;  $l$  — параметр длины вдоль фронта;  $E$ ,  $dl$  — соответственно средневолновая плотность энергии и длина элемента фронта в произвольный момент  $t$ .

В соответствии с [3, 4] в процессе движения средневолновая энергия элемента  $E dl = \text{const}$ . Выберем лагранжеву переменную так, что в начальный момент  $E dl = d\xi$ , где  $d\xi$  — изменение  $\xi$  вдоль элемента  $dl$ . Тогда  $E(\xi, t) = \partial\xi(l, t)/\partial l$ .

Пусть  $z = -h_0 = \text{const}$  — уравнение поверхности дна, тогда [2, 3] скорость волны  $c$  — функция только  $E$ .

При движении наклон элемента, характеризуемый углом  $\alpha$ , образованным нормалью  $\mathbf{n}$  к элементу фронта  $dl$  с осью  $x$ , меняется за счет разности скоростей  $dc$  на его концах. Уравнения, определяющие это изменение и изменение средневолновой плотности энергии элемента [4], дополненные начальными условиями, образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение элемента фронта

$$(1.1) \quad \frac{\partial \alpha(\xi, t)}{\partial t} = c'(E)E \frac{\partial E(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial l}$$

$$\frac{\partial E(\xi, t)}{\partial t} = c(E)E^2 \frac{\partial \alpha(\xi, t)}{\partial \xi} = cE \frac{\partial \alpha}{\partial l}, \quad E(\xi, 0) = 1, \quad \alpha(\xi, 0) = \alpha_0(\xi)$$

Здесь  $\partial\alpha/\partial l = \kappa$  — кривизна элемента фронта  $c' = \partial c/\partial E$ . Эта система эквивалентна системе работы [3], но записана в другом виде.

В инвариантах Римана  $J_+$ ,  $J_-$  система (1.1) примет вид

$$(1.2) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{cc'E^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) J_+ = 0$$

$$(1.3) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{cc'E^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) J_- = 0$$

$$(1.4) \quad J_+ = \alpha - F(E), \quad J_- = \alpha + F(E), \quad F(E) = \int_0^E \sqrt{\frac{c'(E)}{c(E)E}} dE$$

Найдем частное решение в виде простых волн. В волне, бегущей направо [5] (волна, бегущая налево, рассматривается аналогично),  $J_- = \text{const}$  во всей области движения,  $J_+$  сохраняется вдоль прямых характеристик семейства  $C_+$ , задаваемого на плоскости  $\xi t$  уравнением  $\eta = \sqrt{cc'E^3}$ .

Используя связь [2-4] между скоростью фронта волны и средневолновой плотностью энергии  $E$ , найдем

$$(1.5) \quad c = \sqrt{h_0 \left( \frac{3}{4} \left( \frac{E^{1/2}}{h_0} \right)^2 + 1 \right)}, \quad \eta = \frac{1}{2} E^{3/2} h_0^{-1/2}$$

$$F(E) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left[ 1 + \frac{3E^{1/2}}{2h_0} \left( \frac{E^{1/2}}{h_0} + \sqrt{\frac{4}{3} + \left( \frac{E^{1/2}}{h_0} \right)^2} \right) \right]$$

Так как существует значение средневолновой плотности энергии  $E_* = (2/\sqrt{3}h_0)^3$ , при котором волна начинает разрушаться [4], то  $E \in [0, E_*]$  и соответственно  $\alpha \in [\alpha_- - \sqrt{3}/2 \ln(2 + \sqrt{2}), \alpha_-]$ , где  $\alpha_-$  — значение  $J_-$  при  $E = 0$ .

Из (1.4), (1.5) следует, что если в простой волне угол  $\alpha$  с ростом  $\xi$  монотонно убывает на участке фронта, то  $E$  монотонно возрастает. Поэтому характеристики семейства  $C_+$  расходятся и участок все время будет участком простой волны.

Если на участке фронта в простой волне  $\alpha$  возрастает, то  $E$  убывает. Поэтому через конечное время характеристики  $C_+$  пересекутся и появится неоднозначность в определении  $J_+$ ,  $J_-$ , т. е. произойдет опрокидывание простой волны. С этого момента будем рассматривать разрывные решения типа скачка.

**2. Движение с разрывами.** Систему (1.1) можно записать в дивергентной форме, причем не единственным образом. Для любой дивергентной формы из соответствующей интегральной формулировки уравнений, следуя [6], получим, что скорость скачка  $u = (\eta_1 + \eta_2)/2$ , где  $\eta_2$  — характеристическая скорость до скачка,  $\eta_1$  — после скачка. При этом с точностью до  $\epsilon^3$  ( $\epsilon$  — интенсивность скачка, малая величина) изменение величин в скачке совпадает с изменением величин в простой волне.

Рассмотрим геометрически изменение профилей начальных возмущений. Пусть вне конечного отрезка фронт прямолинеен и параллелен оси  $x$ , а на отрезке задано начальное возмущение. В сопровождающей системе  $\xi'\eta$ , где  $\xi' = \xi - \eta_\infty t$  ( $\eta_\infty = \eta_2$  относится к невозмущенному участку фронта), фронту соответствует профиль  $\eta(\xi')$ .

Из равенства  $u = (\eta_1 + \eta_2)/2$ , следует [3], что положение ударной волны определяется по правилу «равенства площадей».

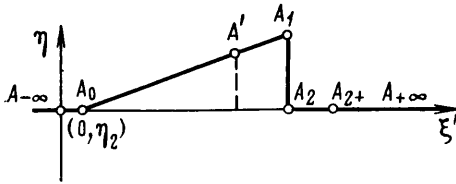
Непрерывной кривой линии фронта соответствует на плоскости  $\xi'\eta$  кусочно-непрерывная кривая  $\eta(\xi')$ . Верно и обратное. На плоскости  $x\eta$  параметрическим уравнением линии фронта, соответствующей данному возмущению  $\eta(\xi')$ , будет

$$(2.1) \quad x(A) = x(A_\infty) + \int_{\xi'(A_\infty)}^{\xi'(A)} \frac{\sin \alpha(\xi', t) d\xi'}{E(\xi', t)}$$

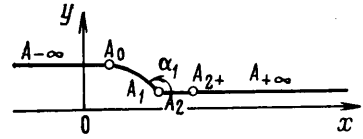
$$y(A) = y(A_\infty) + \int_{\xi'(A_\infty)}^{\xi'(A)} \frac{\cos \alpha(\xi', t) d\xi'}{E(\xi', t)}$$

где  $A$  — произвольная, а  $A_\infty$  — некоторая фиксированная точка фронта (в данном случае  $A_\infty$  принадлежит невозмущенному участку фронта слева от возмущения),  $d\xi' = d\xi = E(\xi', t) dt$ .

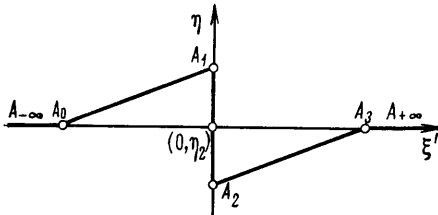
В точках разрыва функции  $\eta(\xi')$  необходимо началу следующего участка профиля приписывать значения  $x, y$ , полученные на конце предыдущего участка.  
 При больших  $t$  можно считать [5], что профиль  $\eta(\xi')$  будет кусочно-непрерывной функцией, состоящей из конечного числа отрезков прямых.



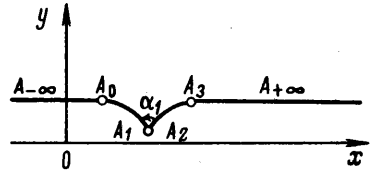
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3.



Фиг. 4

Рассмотрим качественно несколько элементарных профилей. Пусть в момент  $t_0$  ширина треугольного профиля (фиг. 1)

$$\zeta = \xi'(A_2) - \xi'(A_0) = \zeta_0$$

Аналогично [5, 7] получим

$$(2.2) \quad \zeta = \sqrt{\zeta_0^2 + 2S_0(t-t_0)}, \quad [\eta] = -2S_0/\zeta = \zeta_0[\eta]_0/\zeta$$

где  $S_0$  – площадь  $\Delta A_0A_1A_2$  (фиг. 1) по правилу «равенства площадей» постоянна при изменении профиля  $\eta(\xi')$

$$[\eta] = \eta_2 - \eta_1, \quad [\eta] = [\eta]_0 \quad \text{при } t = t_0$$

Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  ширина профиля растет как  $t^{1/2}$ , а интенсивность скачка  $|\eta|$  затухает как  $t^{-1/2}$ .

В промежуточной точке  $A'$ , находящейся на расстоянии  $\zeta_1$  от точки  $A_0$ , получим

$$(2.3) \quad \eta(A') - \eta_2 = -[\eta]\zeta_1/\zeta \sim t^{-1} \quad (t \rightarrow \infty)$$

Профилю фиг. 1 соответствует на плоскости  $xy$  фронт, изображенный на фиг. 2.

Участок  $A_0A_2$  распадается, становясь все более пологим в точке  $A_2$ , так как угол  $\alpha_1 \rightarrow \pi$ ;  $\Delta y(A) = |y(A) - y(A_+\infty)|$  достигает максимума в точке  $A_0$  (в силу монотонности профиля  $\eta(\xi')$  на участке  $A_0A_1$ ) и не меняется, так как при любом  $t$  в точках  $A_0$  и  $A_2$  ( $\alpha(A_0) = \alpha(A_2) = \lim_{A_2+ \rightarrow A_2} \alpha(A_2+)$ ) задается одинаковое направление  $s(E)$ ,

а из (1.4) следует, что  $E(A_0) = E(A_2)$  и величины скоростей тоже одинаковы:  $s(A_0) = s(A_2)$ .

В случае профиля, представленного на фиг. 3, в точке  $\xi' = 0$  возникает неоднозначность. В ней появится и все время будет находиться (в силу симметрии) скачок, который отсекает от профиля перехлестнувшиеся через прямую скачка  $\xi' = 0$  части.

Так как закон движения точки  $A_1$  (фиг. 3) совпадает с законом движения фиксированной точки  $A_1$  (фиг. 1), то, согласно (2.3), интенсивность скачка затухает при  $t \rightarrow \infty$  как  $t^{-1}$ . Длины  $\zeta_1 = \xi'(A_1) - \xi'(A_0)$ ,  $\zeta_2 = \xi'(A_3) - \xi'(A_2)$  не меняются. На плоскости  $xy$  профилю соответствует фронт фиг. 4. Из (1.5) и из монотонности профиля  $\eta(\xi')$  на участках  $A_0A_1, A_2A_3$  следует, что при  $t \rightarrow \infty$   $\alpha_1 \rightarrow \pi$  (фиг. 4), а  $\Delta y(A_1) = \Delta y(A_2) \rightarrow 0$ . Величина  $x(A_3) - x(A_0)$  не меняется. В силу симметрии  $x(A_1) - x(A_0) = x(A_3) - x(A_2)$ , ( $x(A_2) = x(A_1)$ ).

Используя разобранные примеры, можно рассмотреть случай, являющиеся их комбинациями. Так, синусоидальный («волнистый») в момент  $t_0$  фронт на плоскости  $xy$  приводит при  $t \rightarrow \infty$  к пилообразному профилю  $\eta(\xi')$ , который состоит из бесконечного числа участков, аналогичных изображенному на фиг. 3.

Согласно вышесказанному скачки затухают как  $t^{-1}$ . На плоскости  $xy$  пилообразному профилю соответствует фронт, состоящий из бесконечного числа участков типа  $A_0A_1A_2A_3$  фиг. 4. Соседние участки в граничных точках (точки  $A_0, A_3$ ) имеют общую касательную. Каждый из бесконечного числа участков движется так же, как участок  $A_0A_1A_2A_3$  (фиг. 4).

Автор благодарит А. Г. Куликовского за внимание к работе и ценные советы при подготовке рукописи к печати и А. А. Бармина, прочитавшего рукопись и сделавшего полезные замечания.

Поступила 24 IX 1975.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Whitham G. B. A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pt 2.
2. Grimshaw R. The solitary wave in water of variable depth, pt 1. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, pt 3.
3. Grimshaw R. The solitary wave in water of variable depth, pt 2. J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, pt 3.
4. Реутов В. А. Движение уединенной волны над подводным хребтом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
6. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Commun Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, No. 4.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.

УДК 532.594.013.4

### ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ НЕРАСТВОРИМОЙ ПЛЕНКИ

В. С. КИРЧАНОВ, В. Г. НЕВОЛИН

(Пермь)

Присутствие пленки поверхностно-активных веществ приводит к изменению силы, действующей на поверхность. Это изменение не сводится к простому снижению поверхностного натяжения  $\alpha$ , а связано с появлением тангенциальных сил, действующих на свободную поверхность жидкости [1].

В работе рассматривается устойчивость свободной поверхности жидкости с пленкой поверхностно-активного вещества в переменном поле тяжести. Задача решается в линейной постановке. Решение ищется в виде ряда по степеням малой вязкости. Методом преобразований Лапласа по времени и Фурье — по переменным  $x$  и  $y$  (плоскость  $xy$  совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости).

Для смещения поверхности от положения равновесия получено интегродифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами, решение которого ищется методом усреднения [2]. Показано, что возбуждение носит пороговый характер. Наличие порога связано с тем, что энергия возбуждения должна быть не меньше энергии, диссипируемой в системе. Показано, что наличие рассматриваемой пленки существенно повышает порог неустойчивости.

1. Рассматривается слой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины с плоской свободной поверхностью, покрытой нерастворимой пленкой поверхностно-активного вещества. Слой совершает колебания вдоль вертикальной оси  $z$  по закону  $a \cos \omega t$ .

Уравнения движения системы запишутся [3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + (1 + b \cos \omega t) \mathbf{g}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0$$

где  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  — ускорение силы тяжести,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $b = a\omega^2/g$  — безразмерная амплитуда модуляции,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ .