

$$-\frac{2}{3} \left(T' \int_0^t T dt + 2T^2 \right) \text{sh}^2 \sqrt{3} \xi$$

Пример. В случае движения поршня со скоростью $\varepsilon \lambda t^n + \varepsilon^2 V^*(t)$, $n > 1$, уравнение (3.3) интегрируется и дает

$$(3.4) \quad \psi = K_3(t) e^{\sqrt{3} \xi} + K_4(t) e^{-\sqrt{3} \xi} + t L_1(\xi) + L_2(\xi) + \\ + \frac{A}{6(n+1)} [3n+1 - 2(3n+2) \text{sh}^2 \sqrt{3} \xi] t^{2n+2},$$

$$A = \frac{\lambda^2}{3\varepsilon(n+1)(2n+1)(\text{ch} \sqrt{3} h - 1)^2}$$

где K_3 , K_4 , L_1 , L_2 — произвольные функции своих аргументов. Удовлетворяя начальным и граничным условиям задачи (1.3), получим ψ в форме

$$\psi = \int_0^t M(t) dt \text{sh} \sqrt{3} \xi + \frac{A}{6(n+1)} [(3n+1)(1 - e^{-\sqrt{3} \xi}) - 2(3n+2) \text{sh}^2 \sqrt{3} \xi] t^{2n+2}$$

В этом случае выражение для поля скоростей будет

$$u = \varepsilon \lambda t^n \frac{(\text{ch} \sqrt{3} \xi - 1)}{(\text{ch} \sqrt{3} h - 1)} + \\ + \varepsilon^{3/2} \left[\sqrt{3} M(\text{ch} \sqrt{3} \xi - 1) + A \left\{ \frac{(3n+1)}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \xi + e^{-\sqrt{3} \xi} - 1) + \frac{\text{sh} 2\sqrt{3} \xi}{2\sqrt{3}} - \xi \right\} t^{2n+1} \right]$$

где $M(0) = 0$, $M'(0) = 0$. Функция M определяется из соотношения

$$V^*(t) = \sqrt{\varepsilon} \left[\sqrt{3} M(\text{ch} \sqrt{3} h - 1) + A \left\{ \frac{(3n+1)}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} h + e^{-\sqrt{3} h} - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{sh} 2\sqrt{3} h}{2\sqrt{3}} - h \right\} t^{2n+1} \right]$$

Автор выражает благодарность Л. И. Седову за ценные замечания.

Поступила 15 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1964, т. 137, № 6.
2. Бишай Ханна С. С. О движении жидкости с пузырьками газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.

УДК 532.546.013.2

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФОКУСИРОВКИ ВОЛН СЖАТИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ УЛЬТРАСТРУИ

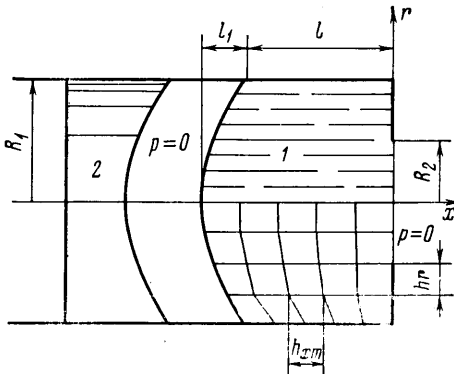
Г. А. АТАНОВ, З. Г. ЗУЙКОВА

(Донецк)

Известен принцип фокусировки волн сжатия при отражении их от неплоских поверхностей. Изобретение [1] предполагает с этой целью применение в импульсном водомете поршня с поверхностью специальной формы. В данной работе численно исследуется использование фокусировки для получения ультразвука.

1. Установка изображена на фиг. 1. Некоторое количество воды 1 расположено у выходного отверстия цилиндра. Поршень 2 с поверхностью специальной формы разгоняется и ударяет по воде. В результате возникает ударная волна, форма которой определяется формой поршня. Распространяясь по воде, волна вызывает стекание потоков к оси и, следовательно, повышает давление у оси сильнее, чем у стенок. Область повышенного давления перемещается к отверстию и, отражаясь от свободной поверхности, вызывает истечение.

Осесимметричное течение воды в установке описывается системой уравнений газовой динамики в дивергентной форме:



Фиг. 1

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho r + \frac{\partial}{\partial x} \rho u r + \frac{\partial}{\partial r} \rho v r &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u r + \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{n} (\rho^n + n \rho u^2 - 1) + \frac{\partial}{\partial r} \rho u v r &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho v r + \frac{\partial}{\partial x} \rho u v r + \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{n} (\rho^n + n \rho v^2 - 1) &= \frac{\rho^n - 1}{n} \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u(x, r, 0) &= 0, \quad v(x, r, 0) = 0, \\ \rho(x, r, 0) &= 1 \quad (x_p(r, 0) < x \leq 0, \\ &0 \leq r \leq 1) \quad u(x_p, r, 0) = u_0 \end{aligned}$$

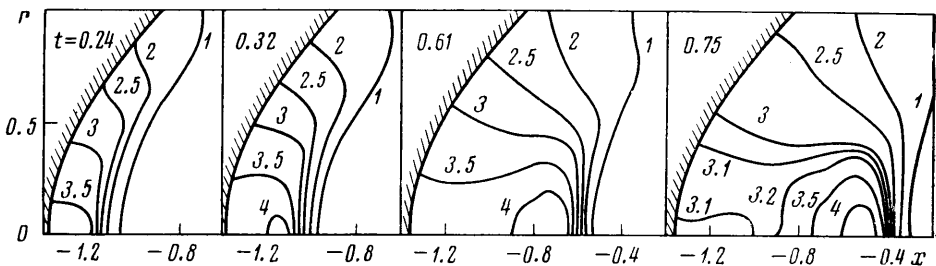
На контуре ствола, уступе, оси и поршне ставится условие непрерывности нормальной компоненты скорости:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} v(x, 1, t) &= 0 \quad (x_p(1, t) < x \leq 0), \quad u(0, r, t) = 0 \quad (R_2/R_1 \leq r \leq 1) \\ v(x, 0, t) &= 0, \quad (x_p(0, t) < x \leq 0) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[u(x_p, r, t) - v(x_p, r, t) \frac{d}{dr} f(r) \right] = A' \int_0^1 [1 - \rho^n(x_p, r, t)] r dr$$

$$A' = 2 \frac{F B R_1}{M_p a_0^2} = 2 \frac{1}{n} \frac{M_b}{M_p} \frac{R_1}{L}$$

В выходном сечении ставится приближенное условие, заключающееся в постоянстве давления (а значит, и плотности): $\rho(0, r, t) = 1$ ($0 \leq r < R_2/R_1$).



Фиг. 2

Давление связано с плотностью уравнением Тэта: $P+1=\rho^n$. Это же уравнение используется и на ударных волнах, т. е. они рассчитываются в квазиакустическом приближении.

Здесь x, r – осевая и радиальная координаты, u, v – соответствующие компоненты скорости, ρ – плотность, n – показатель адиабаты (для воды $n=7.15$), $x_p(r, t)$ – координата поршня, $u_p(t)$ – скорость его, u_0 – начальная скорость, M_p – масса поршня, $f(r)$ – профиль поршня, M_b – масса воды, L – ее приведенная длина, равная вы-

соте цилиндра с поперечным сечением F и объемом, равным объему воды, F — площадь сечения ствола.

Исходные уравнения и краевые условия записаны в безразмерных переменных, в качестве масштабов взяты: длины — радиус ствола R_1 , скорости — скорость звука при нулевом давлении $a_0=1450$ м/с, времени — $t_0=R_1/a_0$, давления — $B=3045$ бар, плотности — $\rho_0=10^3$ кг·м⁻³.

2. Система уравнений (1.1) с краевыми условиями (1.2), (1.3) решается численно методом Годунова [2, 3]. Расчетная сетка (фиг. 1) подвижна и на каждом временном слое строится заново.

По оси Or область интегрирования разбивается на M частей с постоянным шагом h_r , шаг по x определяется из условия разбиения линии $r_m=mh_r$ на K равных частей между координатами поршня и выходного сечения: $h_{xm} = -x_{pm}/K$, $m=0, 1, 2, \dots, M$.

Параметры течения в момент $t+\tau$ по известным в момент t определяются в результате интегрирования уравнений системы (1) по объему ячейки в пространстве (x, r, t) с последующим переходом к интегрированию по ее поверхности. Плотность и нормальная компонента скорости на боковых гранях ячейки определяются при расчете распада разрыва. Тангенциальная компонента скорости берется из той ячейки, из которой приносится на боковую грань со скоростью контактной поверхности. На границах области распад дает только одну волну. Для нахождения параметров к условиям на волне добавляется одно из граничных условий (1.3).

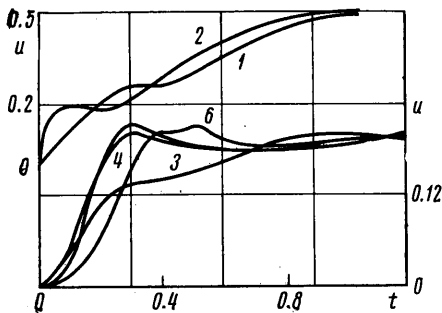
3. Процесс фокусировки иллюстрирует фиг. 2, на которой представлены системы изобар для различных моментов времени для установки со следующими параметрами: $A'=0.0005$; $u_0=0.1$; $l=0.9$; $l_1=0.5$; $R_2/R_1=0.43$; $f=0.5$ р². Их вид показывает, что форма поршня существенно влияет на форму возникшей в начальный момент ударной волны. На оси возникает область повышенного давления, которая перемещается от поршня к свободной поверхности, причем давление в ней значительно превышает давление за фронтом ударной волны, которую генерировал бы плоский поршень при ударе с той же начальной скоростью (2600 бар).

Скорость истечения в центре отверстия в функции времени приведена на фиг. 3 (кривая 1 — для вогнутого, 2 — для плоского поршня). Отсчет времени ведется с начала истечения. На начальной стадии скорость достигает при параболическом поршне больших значений, чем при плоском. Вторые изгибы кривых появляются с приходом к отверстию волн сжатия, отраженных от уступа. После этого кривые практически совпадают. Это объясняется тем, что при параболическом поршне из-за концентрации волн у оси давление у стенки ниже, чем при плоском. Поэтому интенсивность отраженных от уступа волн и повышение скорости в этом случае меньше.

Итак, выигрыш в скорости истечения получается только в первой волне. Чтобы процесс определялся ею, необходимы достаточно большие значения параметра A' (это эквивалентно облегчению поршня).

На фиг. 3 внизу приведены скорости истечения, полученные при $A'=0.5$ (все остальные параметры не изменялись). Кривая 3 соответствует плоскому поршню, 4 — параболическому, 5 — коническому, 6 — сферическому. Как видно, неплюсский поршень почти не приводит к повышению скорости истечения. Однако использование неплюсского поршня имеет следующие преимущества.

Скорость истечения возрастает быстрее, чем при плоском поршне. Это должно благоприятно сказаться на распространении струи. Максимальное давление на стенку при плоском поршне составляет 3500, при параболическом — 2100, при коническом — 2500, при сферическом — 2000 бар, т. е. одна и та же скорость истечения при неплюсском поршне достигается при меньшем давлении на стенку, чем при плоском. Значит, неплюсский поршень позволяет повысить отношение динамического напора струи к статическому давлению на стенку установки. Правда, давление на неплюсский поршень несколько превышает давление на стенку.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 17 XI 1975

1. Подобедов А. В. Ударное устройство для импульсного водомета. Авт. свид. кл. E21c 25/60 № 317792. Опубликовано 19 октября 1971 г.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, № 3.

3. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6.

УДК 532.59

О ПОВЕДЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ УЕДИНЕННОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. РЕУТОВ

(Москва)

В случае потенциального движения идеальной несжимаемой однородной жидкости в [1] получена система, описывающая распространение цуга волн в среде с медленно меняющимися свойствами, причем движение в цуге характеризуется волновым вектором и частотой.

Частным случаем цуга, когда длина волн в цуге велика, является уединенная волна. В [2, 3] получена квазилинейная система уравнений в частных производных, описывающая двумерное и трехмерное движение уединенной волны в слое жидкости переменной глубины. Из этой системы следует, что если невозмущенное состояние жидкости — состояние покоя, то некоторая интегральная величина (средневолновая энергия [2-4]), отнесенная к элементу фронта, сохраняется в процессе движения. Этот факт справедлив и для цуга волн, что можно показать, применив формализм [1] к лагранжиану, аналогичному использованному в [2].

В данной работе в случае слоя жидкости постоянной глубины находится решение в виде простых волн для системы, эквивалентной системе, полученной в [3], и описывающей движение уединенной волны и цуга волн.

Показано, что возможно опрокидывание простых волн, которое в данном случае приводит к образованию угловых точек на фронте волны. Рассмотрено несколько примеров начальных возмущений и найдена их асимптотика при $t \rightarrow \infty$.

Изложение ведется на примере уединенной волны, однако в силу вышесказанного результаты автоматически переносятся на случай цуга волн.

1. Простые волны. В предположениях [3, 4] движение каждого малого криволинейного участка фронта уединенной волны мало отличается от движения в плоской волне. Поэтому движение волны в слое жидкости постоянной глубины можно описать функцией $\theta(x, y, t)$ фазой волны. В разные моменты времени t уравнение $\theta(x, y, t) = 0$ соответствует гребню волны (в случае цуга гребням волн соответствуют значения $\theta(x, y, t) = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и задает на плоскости xy семейство линий фронта. Две близкие кривые из однопараметрического семейства кривых $\xi = \text{const}$, ортогональных семейству фронтов, выделяют из него элемент фронта в различные моменты времени. Если зафиксировать один из элементов, при $t = 0$, то остальные (при $t \neq 0$) — его образы.

Пусть $\mathbf{k} = \text{grad } \theta$ — волновой вектор, $k = |\mathbf{k}|$, $c = -k^{-1}(\partial\theta/\partial t)$ — скорость волны; l — параметр длины вдоль фронта; E , dl — соответственно средневолновая плотность энергии и длина элемента фронта в произвольный момент t .

В соответствии с [3, 4] в процессе движения средневолновая энергия элемента $E dl = \text{const}$. Выберем лагранжеву переменную так, что в начальный момент $E dl = d\xi$, где $d\xi$ — изменение ξ вдоль элемента dl . Тогда $E(\xi, t) = \partial\xi(l, t)/\partial l$.

Пусть $z = -h_0 = \text{const}$ — уравнение поверхности дна, тогда [2, 3] скорость волны c — функция только E .

При движении наклон элемента, характеризуемый углом α , образованным нормалью \mathbf{n} к элементу фронта dl с осью x , меняется за счет разности скоростей dc на его концах. Уравнения, определяющие это изменение и изменение средневолновой плотности энергии элемента [4], дополненные начальными условиями, образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение элемента фронта

$$(1.1) \quad \frac{\partial \alpha(\xi, t)}{\partial t} = c'(E)E \frac{\partial E(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial l}$$

$$\frac{\partial E(\xi, t)}{\partial t} = c(E)E^2 \frac{\partial \alpha(\xi, t)}{\partial \xi} = cE \frac{\partial \alpha}{\partial l}, \quad E(\xi, 0) = 1, \quad \alpha(\xi, 0) = \alpha_0(\xi)$$