УДК 532.529.5–1

ДВИЖЕНИЕ СМЕСИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА НА ПЕРВОЙ СТАДИИ КАВИТАЦИИ

С. С. БИШАЙ ХАННА

(Москва)

Рассматривается нестационарное движение смеси идеальной несжимаемой жидкости с газовыми пузырьками на первой стадии развития кавитации. Получены решения в первом и втором приближениях. Решения применяются к конкретным случаям течения в трубе.

1. Рассмотрим движение кавитирующей жидкости в рамках модели Б. С. Когарко [1], в которой такая смесь жидкости с пузырьками считается сжимаемой жидкостью с внутренним параметром R_1 (радиус пузырьков). Изучается движение такой среды в трубе с неподвижным дном. Движение описывается системой уравнений движения, неразрывности и состояния. Выпишем эту систему в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial p}{\partial \xi}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0 \tag{1.1}$$

$$p=1-\left[R\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right],\qquad \rho=\frac{1}{1+\beta(R^3-1)} \tag{1.2}$$

$$u_1=\sqrt{\frac{p_n}{\rho_0\beta}}\,u,\qquad p_1=p_np,\qquad R_1=R_0R,\qquad \rho_1=\rho_0\rho$$

$$\xi_1=\frac{R_0}{\sqrt{\beta}}\xi,\qquad t_1=\sqrt{\frac{\rho_0}{p_n}}R_0t,\qquad \beta=bR_0^3,\qquad b={}^4/_3\pi n\rho_0$$

Здесь n – число газовых пузырьков в единице массы жидкости (считается постоянным), p_n – давление внутри газовых пузырьков, R_0 – радиус ядер кавитации, ρ_0 – плотность смеси, когда $R_1=R_0$, t_1 – время и ξ_1 – лагранжева координата, которая обозначает расстояние от неподвижного конца трубы в начальный момент до развития кавитации. Жидкость считается сжимаемой при $R_1>R_0$ и несжимаемой при $R_1=R_0$. Начальные и граничные условия задачи

$$R=1,\quad p=1,\quad u=0\quad (t=0),\qquad R=1,\quad p=1,\quad u=0\quad (\xi=0) \tag{1.3}$$

В этой работе p_n считается постоянным и рассматривается движение на первой стадии развития кавитации, когда можно для R написать выражение

$$R=1+\varepsilon\varphi(\xi,t)+\varepsilon^2\psi(\xi,t) \tag{1.4}$$

где $\varepsilon=\beta^2$ – малый параметр. Пользуясь этим выражением для R и пренебрегая членами порядка ε^3 и выше, уравнения (1.2) приведем к виду

$$p=1-\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\varepsilon^2\left[\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] \tag{1.5}$$

$$\rho=1-3\varepsilon^{3/2}\varphi-3\varepsilon^{5/2}(\varphi^2+\psi) \tag{1.6}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.1), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon^{3/2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi\,\partial t^2}+\varepsilon^{5/2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\varphi\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi\,\partial t^2}+3\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\,\partial t^2}\right) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=3\varepsilon^{3/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+3\varepsilon^{5/2}\left(2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \tag{1.8}$$

2. Исключая u из уравнений (1.7) и (1.8) и пренебрегая членами порядка ε^2 и выше, получим дифференциальное уравнение для φ

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^2\,\partial t^2}-3\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{2.1}$$

С учетом начальных и граничных условий (1.3) решение (2.1) будет

$$\varphi=\int_0^t T(t)\,dt\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,\xi \tag{2.2}$$

где T — произвольная функция времени, которая удовлетворяет условиям $T(0)=0$, $T'(0)=0$. Выражения для u, p, ρ в этом случае

$$u=\sqrt{3}\,\varepsilon^{3/2}T(\mathrm{ch}\sqrt{3}\,\xi-1),\qquad p=1-\varepsilon T'\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,\xi \tag{2.3}$$

$$\rho=1-3\varepsilon^{3/2}\int_0^t T\,dt\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,\xi \tag{2.4}$$

Примеры.

Движение в трубе за движущимся поршнем. Предположим, что имеется поршень в контакте с частицами $\xi=h$, который движется с безразмерной скоростью $u=\varepsilon V(t)$. Это граничное условие определяет $T(t)$ в форме

$$T(t)=\frac{V(t)}{\sqrt{3}\varepsilon(\mathrm{ch}\sqrt{3}\,h-1)}$$

Здесь требуется, чтобы $V(0)=0$ и $V'(0)=0$.

Труба с неподвижным дном и свободной поверхностью. Пусть поверхность при $\xi=h$ будет свободной, давление у этого сечения равно атмосферному p_a, т. е. $p=p_a/p_n$ при $\xi=h$. Это определяет $T(t)$ в виде

$$T(t)=\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,h}\left(1-\frac{p_a}{p_n}\right)t$$

Для осуществления такого движения начальное поле давления должно быть

$$p=1-\left(1-\frac{p_a}{p_n}\right)\frac{\mathrm{sh}\sqrt{3}\,\xi}{\mathrm{sh}\sqrt{3}\,h}$$

Пульсирующее давление на свободной поверхности. Пусть давление $p=1+\varepsilon a\sin\omega t$ действует на свободную поверхность. В этом случае

$$T(t)=\frac{a}{\omega\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,h}(\cos\omega t-1)$$

3. Теперь исключая u из уравнений (1.7) и (1.8), получаем дифференциальное уравнение для ψ

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^2\,\partial t^2}-3\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=3\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+6\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}- \tag{3.1}$$
$$-2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi\,\partial t^2}-3\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi^2\,\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-3\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial t}\right)^2$$

Пользуясь найденным выражением (2.2) для φ, это уравнение запишем в форме

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^2\,\partial t^2}-3\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-6\left(T'\int_0^t T\,dt+2T^2\right)\mathrm{sh}^2\sqrt{3}\,\xi-3\left(2T'\int_0^t T\,dt+3T^2\right) \tag{3.2}$$

Интегрируя это уравнение 2 раза по ξ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=K_1(t)e^{\sqrt{3}\,\xi}+K_2(t)e^{-\sqrt{3}\,\xi}+\frac{2}{3}T'\int_0^t T\,dt+\frac{1}{3}T^2- \tag{3.3}$$

$$-\frac{2}{3}\left(T'\int_0^t T\,dt+2T^2\right)\operatorname{sh}^2\sqrt{3}\,\xi$$

Пример. В случае движения поршня со скоростью $\varepsilon\lambda t^n+\varepsilon^2V^*(t)$, $n>1$, уравнение (3.3) интегрируется и дает

$$\psi=K_3(t)e^{\sqrt{3}\,\xi}+K_4(t)e^{-\sqrt{3}\,\xi}+tL_1(\xi)+L_2(\xi)+ \tag{3.4}$$

$$+\frac{A}{6(n+1)}[3n+1-2(3n+2)\operatorname{sh}^2\sqrt{3}\,\xi]t^{2n+2},$$

$$A=\frac{\lambda^2}{3\varepsilon(n+1)(2n+1)(\operatorname{ch}\sqrt{3}\,h-1)^2}$$

где K_3, K_4, L_1, L_2 – произвольные функции своих аргументов. Удовлетворяя начальным и граничным условиям задачи (1.3), получим ψ в форме

$$\psi=\int_0^t M(t)\,dt\operatorname{sh}\sqrt{3}\,\xi+\frac{A}{6(n+1)}[(3n+1)(1-e^{-\sqrt{3}\,\xi})-2(3n+2)\operatorname{sh}^2\sqrt{3}\,\xi]t^{2n+2}$$

В этом случае выражение для поля скоростей будет

$$u=\varepsilon\lambda t^n\frac{(\operatorname{ch}\sqrt{3}\,\xi-1)}{(\operatorname{ch}\sqrt{3}\,h-1)}+$$

$$+\varepsilon^{5/2}\left[\sqrt{3}\,M(\operatorname{ch}\sqrt{3}\,\xi-1)+A\left\{\frac{(3n+1)}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\,\xi+e^{-\sqrt{3}\,\xi}-1)+\frac{\operatorname{sh}2\sqrt{3}\,\xi}{2\sqrt{3}}-\xi\right\}t^{2n+1}\right]$$

где $M(0)=0$, $M'(0)=0$. Функция M определяется из соотношения

$$V^*(t)=\sqrt{\varepsilon}\left[\sqrt{3}\,M(\operatorname{ch}\sqrt{3}\,h-1)+A\left\{\frac{(3n+1)}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\,h+e^{-\sqrt{3}\,h}-1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\operatorname{sh}2\sqrt{3}\,h}{2\sqrt{3}}-h\right\}t^{2n+1}\right]$$

Автор выражает благодарность Л. И. Седову за ценные замечания.

Поступила 15 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
2. *Бишай Ханна С. С.* О движении жидкости с пузырьками газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.

УДК 532.546.013.2

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФОКУСИРОВКИ ВОЛН СЖАТИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ УЛЬТРАСТРУИ

Г. А. АТАНОВ, З. Г. ЗУЙКОВА

(Донецк)

Известен принцип фокусировки волн сжатия при отражении их от неплоских поверхностей. Изобретение [1] предполагает с этой целью применение в импульсном водомете поршня с поверхностью специальной формы. В данной работе численно исследуется использование фокусировки для получения ультраструи.