

ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ С ХОЛЛОВСКОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

М. С. РУДЕРМАН

(Москва)

В плазме с холловской дисперсией и джоулевой диссипацией в магнитогидродинамическом приближении исследуется эволюция стационарных периодических решений уравнения Кортевега — де Вриза (так называемых кноидальных волн), распространяющихся по направлению силы тяжести при произвольной ориентации магнитного поля. Считается, что длина волны много меньше характерного масштаба неоднородности. В различных предельных случаях рассматривается зависимость амплитуды волны от расстояния до источника волны. Показано, что поведение волны зависит от распределения температуры в среде. В частном случае изотермической атмосферы для холодной плазмы в отсутствие диссипации задача решена аналитически. При этом оказывается, что амплитуда как быстрых, так и медленных волн растет при распространении волны вверх и падает при распространении вниз. Нелинейность волны (т. е. параметр, характеризующий отличие волны от синусоидальной) для быстрых магнитозвуковых волн уменьшается при распространении вверх и возрастает при распространении вниз. Для медленных магнитозвуковых волн имеет место обратная ситуация.

1. Вывод основного уравнения. В работе [1] исследовано распространение нелинейного магнитного звука в гравитационном поле без учета дисперсионных и диссипативных эффектов, препятствующих образованию разрывов. В данной работе эти эффекты учитываются.

Рассмотрим плоские магнитозвуковые волны в плазме, находящейся в однородном гравитационном поле при условии, что циклотронная частота вращения электронов ω_c больше либо порядка частоты их столкновений τ_e^{-1} ($\omega_c \tau_e \gg 1$). При этом условии становятся существенными токи Холла, вызывающие дисперсию волн. Считаем, что частота волны ω много меньше частоты столкновений электронов τ_e^{-1} . Тогда возможно гидродинамическое описание. Единственный диссипативный процесс, который будет учитываться в дальнейшем, — джоулева диссипация. Полагаем, что направление распространения волн совпадает с направлением силы тяжести. Среду считаем идеальным, совершенным газом.

В [2, 3] приведены уравнения, описывающие при сделанных выше предположениях волны малой амплитуды в отсутствие гравитационного поля. С учетом гравитации уравнения принимают вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial B^2}{\partial x} = -g$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c m_i B_x}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + v_m \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = B_x \frac{\partial w}{\partial x} - u \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{cm_i B_x}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + v_m \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad B_x = \text{const}$$

Здесь ρ — плотность; u, v, w — компоненты вектора скорости; p — давление; B_x, B_y, B_z — компоненты вектора магнитной индукции; $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$; g — ускорение силы тяжести; c — скорость света; m_i — масса иона; e — заряд электрона; $v_m = c^2 / 4\pi\sigma$ — магнитная вязкость; σ — проводимость; γ — показатель адиабаты. В дальнейшем считаем $B_x \neq 0$.

Рассмотрим стационарное состояние среды, когда все величины в уравнениях не зависят от времени и среда неподвижна. Тогда $\rho = \rho_0(x)$, $p = p_0(x)$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(x)$. Из (1.1) следует, что $\mathbf{V}_0 = \text{const}$ и

$$(1.2) \quad \frac{dp_0}{dx} = -\rho_0 g$$

Введем скорость звука $a_T^2 = \gamma p_0 / \rho_0$. Из уравнения (1.2) следует связь между ρ_0 и a_T^2

$$(1.3) \quad \rho_0 = \rho_{00} \frac{a_{T0}^2}{a_T^2} \exp \left(-\gamma g \int_0^x \frac{dx'}{a_T^2} \right)$$

Здесь $a_{T0} = a_T(0)$, $\rho_{00} = \rho_0(0)$. Видно, что задание равновесной температуры как функции x однозначно определяет зависимость плотности ρ_0 от x , поскольку a_T есть функция только температуры.

Для дальнейшего систему координат выберем так, чтобы $B_{y0} = 0$.

Рассмотрим малые возмущения среды, полагая $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $B_y = b_y$, $B_z = B_{z0} + b_z$. Введем безразмерные параметры $\varepsilon = \rho' / \rho_0$, $\delta = ck / \omega_{i0}$, $\chi = v_m k^2 / \omega$, $\lambda = 1 / Lk$, в которых k — волновое число, ω — частота волны, ω_{i0} — ионная ленгмюровская частота, L — характерный размер неоднородности. Считаем $\varepsilon, \delta, \chi, \lambda \ll 1$ и оставляем члены порядка $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon\delta, \varepsilon\chi, \varepsilon\lambda$ аналогично тому, как это делается при выводе уравнения Кортевега — де Вриза (см., например, [4]).

Методом [5, 6] в принятом приближении из (1.1) получаем уравнение, описывающее нелинейные волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x

$$(1.4) \quad u_t + [a_{\pm}(x) + b_{\pm}(x)u]u_x + \beta_{\pm}(x)u_{xxx} = v_{\pm}(x)u_{xx} + \frac{a_{\pm}(x)}{q_{\pm}(x)} \frac{dq_{\pm}}{dx} u$$

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} (\sqrt{Va_T^2 + V_A^2 + 2a_T V_A \cos \alpha} \pm \sqrt{Va_T^2 + V_A^2 - 2a_T V_A \cos \alpha})$$

$$b_{\pm} = 1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{a_T^2 - a_{\mp}^2}{a_{\pm}^2 - a_{\mp}^2} \pm \frac{a_{\pm}^2 - a_T^2}{2(a_{\pm}^2 - a_{\mp}^2)}, \quad v_{\pm} = \pm \frac{v_m}{2} \frac{a_{\pm}^2 - a_T^2}{a_{\pm}^2 - a_{\mp}^2}$$

$$\beta_{\pm} = \pm \kappa^2 \frac{a_{\pm}(a_T^2 - a_{\pm}^2)}{2(a_{\pm}^2 - a_{\mp}^2)(a_{\pm}^2 - V_A^2 \cos^2 \alpha)},$$

$$q_{\pm} = \left\{ \rho_0 a_{\pm} \left[1 + \text{ctg}^2 \alpha \left(1 - \frac{a_T^2}{a_{\pm}^2} \right) \right] \right\}^{-1/2}$$

Здесь $V_A^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0$, $\kappa = cm_i B_0 \cos \alpha / 4\pi e \rho_0$, α — угол между направлением распространения волны и вектором магнитной индукции. Индексы плюс и минус относятся к быстрым и медленным магнитозвуковым вол-

нам. В дальнейшем везде, где это не вызовет недоразумения, эти индексы опускаются. Заметим, что $\beta_+ < 0$, $\beta_- > 0$, $v_{\pm} > 0$.

Уравнения, отличающиеся от (1.4) только видом функций b_{\pm} и q_{\pm} , имеют место также для величин ρ' , p' , w , b_x .

В отсутствие гравитации ($g=0$, ρ_0 , $a_T^2 = \text{const}$) уравнение (1.4) совпадает с уравнением Кортвега — де Вриза — Бюргера для плазмы с холловской дисперсией и джоулевой диссипацией [6].

В отсутствие дисперсии и диссипации оно совпадает с уравнением для нелинейного магнитного звука [1].

Сделав замену переменных $\tau = \int dx/a(x) - t$, преобразуем уравнение (1.4) к виду

$$(1.5) \quad a^2 u_x + buu_{\tau} + \frac{\beta}{a^2} u_{\tau\tau} = \frac{v}{a} u_{\tau\tau} + \frac{a^2}{q} \frac{dq}{dx} u$$

Уравнение (1.5) и будет основным для дальнейшего исследования. Отметим, что уравнение, аналогичное (1.5), но с другими коэффициентами, было рассмотрено в [7].

2. Распространение кноидальных волн с медленно меняющимися параметрами. Введя аналогично [7] новые переменные Φ и H , вместо уравнения (1.5) получим эквивалентную ему систему уравнений Лагранжа второго рода

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \Phi_x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \Phi_x} = - \frac{\partial R}{\partial \Phi_x} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial H_x} - \frac{\partial L}{\partial H} = - \frac{\partial R}{\partial H_x}$$

для плотности функций Лагранжа L и Рэля R

$$L = a^{-2} q^{-2} \left(\frac{a^2}{2} \Phi_x \Phi_x + \frac{b}{6} \Phi_x^3 + \frac{\beta}{a^2} H_x \Phi_x + \frac{\beta}{2a^2} H^2 - \frac{v^2}{8\beta} \Phi_x^2 \right)$$

$$R = - \frac{1}{2} v a^{-3} q^{-2} H_x \Phi_x, \quad \Phi_x = u, \quad H = u_x - \frac{av}{2\beta} u$$

В отсутствие диссипации и гравитации уравнение (1.5) превращается в обычное уравнение Кортвега — де Вриза и имеет стационарные периодические решения в виде кноидальных волн (см., например, [8])

$$(2.2) \quad u = \frac{12\omega^2\beta}{\pi a^2 b} K(s) \frac{\partial}{\partial \theta} Z \left[\frac{K(s)\theta}{\pi} \right], \quad \theta = \omega\tau - kx$$

$$k = \frac{4\omega^3\beta}{\pi^2 a^4} K^2(s) \left[2 - s - 3 \frac{E(s)}{K(s)} \right], \quad A = u_{\max} - u_{\min} = \frac{12\omega^2|\beta|}{\pi^2 a^2 b} s K^2(s)$$

Здесь k , ω , A — волновое число, частота и амплитуда волны; K , E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем \sqrt{s} ; Z — дзета-функция Якоби. Заметим, что период функции, задаваемой (2.2), равен 2π . На фиг. 1 показана зависимость $Q = 0.1 A a^2 b / \omega^2 |\beta|$ и $\Pi = ka^2 / \omega^3 \beta$ от s при постоянном ω . Сплошная кривая соответствует Π , пунктирная — Q .

Функция (2.2) не является решением уравнения (2.1), однако при слабых диссипации и неоднородности (т. е. при χ , $\lambda \ll \max(\epsilon, \delta^2)$) можно считать, что решение (2.1) локально близко к кноидальной волне, амплитуда, частота и волновое число которой являются медленными функциями времени и координат.

Рассматриваем следующую граничную задачу: параметры волны не зависят от τ и при $x=0$ принимают значения s_0 , ω_0 , $k_0(\omega_0, s_0)$, $A_0(\omega_0, s_0)$. Очевидно, частота волны не меняется ($\omega = \omega_0$). При этом для определения

зависимости параметров волны от x имеем согласно [9] уравнение для средних

$$(2.3) \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial k} = \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \omega}$$

$$\langle L \rangle = -\frac{\omega k}{2q^2} \langle \Phi_0^2 \rangle + \frac{b\omega^3}{6a^2q^2} \langle \Phi_0^3 \rangle +$$

$$+ \frac{\beta\omega^2}{a^2\sigma^2} \langle H_0 \Phi_0 \rangle + \frac{\beta}{2a^2} \langle H^2 \rangle - \frac{v^2\omega^2}{8\beta} \langle \Phi_0^2 \rangle$$

$$\langle R \rangle = -\frac{v\omega^2}{2a^3q^2} \langle H_0 \Phi_0 \rangle, \quad \langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\theta$$

Заметим, что в (2.3) дифференцирование по k и ω выполняется при постоянных Φ и H .

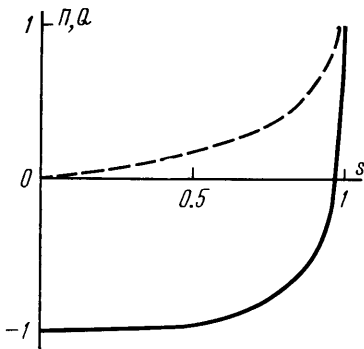
Из (2.3) получаем уравнение для $s(x)$

$$(2.4) \quad \frac{d}{dx} [F(x) Y_1(s)] = -\frac{2\omega^2 v(x)}{[d(x)]^3} F(x) Y_2(s)$$

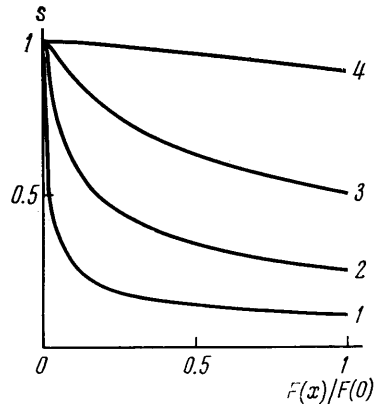
$$F(x) = \beta^2 a^{-4} b^{-2} q^{-2}, \quad Y_1(s) = \frac{K^4}{\pi^2} \left\{ \frac{4-2s}{3} \frac{E}{K} - \frac{1-s}{3} - \frac{E^2}{K^2} \right\}$$

$$Y_2(s) = \frac{4K^6}{15\pi^4} \left\{ 2(s^2 - s + 1) \frac{E}{K} - (2-s)(1-s) \right\}$$

Уравнение (2.4) позволяет найти зависимость s , а следовательно, A и k от x . На фиг. 2 показана зависимость s от $F(x)/F(0)$ при $v=0$ для раз-



Фиг. 1



Фиг. 2

личных s_0 . Кривые с номерами 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $s_0=0.1, 0.25, 0.5, 0.9$. Таким образом, задав зависимость температуры от x и воспользовавшись графиками, приведенными на фиг. 1, 2, можно в отсутствие диссипации определить зависимость от x волнового числа k и амплитуды волны A .

Рассмотрим несколько частных случаев.

1°. Пусть $s \ll 1$, т. е. волна близка к гармонической. Тогда $Y_1(s) \approx Y_2(s) \approx \frac{\pi^2}{128} s^2$ и из (2.4), (2.2) следует формула для амплитуды волны

$$(2.5) \quad A = A_0 \frac{q}{q_0} \exp \left(-\omega^2 \int_0^x \frac{v dx'}{a^3} \right)$$

Эту формулу легко получить, решая линеаризованное уравнение (1.5). Как видим, амплитуда волны определяется поведением функций $q(x)$, $v(x)$ и $a(x)$. Величина затухания пропорциональна ω^2 .

2°. При $1-s \ll 1$ волна близка к последовательности солитонов

$$K \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-s}, \quad E \approx 1, \quad Y_1 \approx \frac{2}{3\pi^2} K^3, \quad Y_2 \approx \frac{8}{15\pi^4} K^5$$

Из (2.2), (2.4) получим для амплитуды

$$(2.6) \quad A = A_0 \left(\frac{a^2 b q^4 \beta_0^4}{a_0^2 b_0 q_0^4 \beta^4} \right)^{1/4} \left[1 + \frac{4A_0}{45} \left(\frac{\beta_0}{a_0^2 b_0 q_0^4} \right)^{1/4} \int_0^x v \left(\frac{b^4 q^4}{a \beta^4} \right)^{1/4} dx' \right]^{-1}$$

В однородной среде при больших x найдем

$$(2.7) \quad A = 45 a \beta / 4 v b x$$

Видно, что при больших x амплитуда волны не зависит от первоначальной амплитуды A_0 .

3°. Пусть волна распространяется в изотермической атмосфере в отсутствие диссипации при $a_T^2 \ll V_A^2$. Из условия изотермичности следует $a_T^2 = \text{const}$. Тогда из (1.3) получаем, что закон изменения плотности имеет вид $\rho_0 = \rho_{00} \exp(-x/h)$, где $h = a_T^2 / \gamma g$ — высота эквивалентной атмосферы.

Для параметров, характеризующих распространение быстрых магнитозвуковых волн, в этом случае имеем $a_+^2 = V_A^2 = A_{A_0}^2 \exp(x/h)$, $\beta_+ = \beta_{+0} \exp(3x/2h)$, $b_+ = b_{+0}^{3/2}$, $q_+ = q_{+0} \exp(x/4h)$, $F_+ = F_{+0} \exp(x/2h)$. Из (2.4) для s и A получаем

$$(2.8) \quad Y_1(s) = Y_1(s_0) \exp(-x/2h), \quad A = A_0 s s_0^{-1} K^2(s) K^{-2}(s_0) \exp(x/2h)$$

Поскольку $Y_1(s)$ — монотонно растущая функция s , s монотонно убывает с ростом x . Параметр s характеризует отличие волны от синусоидальной: чем меньше s , тем ближе волна к синусоиду. Поэтому с ростом s можно говорить об увеличении нелинейности волны. Как видим, нелинейность волны уменьшается при распространении волны вверх и увеличивается при распространении вниз.

Из (2.8) следует: $dA/dx > 0$.

Для медленной волны имеем $a_-^2 = a_T^2 \cos \alpha$, $b_- = (\gamma + 1)/2$, $q_- = q_0 \exp(x/2h)$, $\beta_- = \beta_{-0}$, $F_- = F_{-0} \exp(-x/h)$. Тогда из (2.4) для s и A получаем

$$(2.9) \quad Y_1(s) = Y_1(s_0) \exp(x/h), \quad A = A_0 s s_0^{-1} K^2(s) K^{-2}(s_0)$$

Как видим, нелинейность волны растет при распространении вверх и уменьшается при распространении вниз. Легко показать также, что $dA/dx > 0$.

Отметим, что эти результаты хорошо согласуются с выводами [1], где показано, что в отсутствие дисперсии неоднородность препятствует действию нелинейных эффектов при распространении быстрой магнитозвуковой волны вверх и способствует при распространении вниз. Для медленных магнитозвуковых волн имеет место противоположная ситуация.

Таким образом, при распространении кноидальной волны в среде с холловской дисперсией и джоулевой диссипацией в присутствии гравитационного поля ее поведение полностью определяется заданием температуры $T(x)$ и проводимости $\sigma(x)$. Частота волны не меняется, а амплитуда и волновое число зависят от параметра нелинейности s . Зависимость s от x определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения (2.4).

Автор благодарит В. Б. Баранова за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Поступила 20 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Л. А., Рубаха Н. Р.* Нелинейный магнитный звук в гравитационном поле. Изв. вузов. Радиофизика, т. 15, 1972, № 9.
2. *Баранов В. Б., Рудерман М. С.* Волны в плазме с холловской дисперсией. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
3. *Baranov V. B., Ruderman M. S.* On waves in plasma with the Hall dispersion. In: Rarefied Gas. Dynam. Proc. 9-th Internat. Sympos., Göttingen, 1974, vol. 1. Pösch-Wahn, 1974.
4. *Карпман В. И.* Линейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
5. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* О приближенных уравнениях для волн в средах с малыми нелинейностью и дисперсией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
6. *Рудерман М. С.* Метод получения уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
7. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Нелинейные волны в неоднородных средах с дисперсией. В сб. «Проблемы дифракции и распространения волн», вып. 12. Л., Изд. ЛГУ, 1973.
8. *Wiegel R. L.* A presentation of cnoidal wave theory for practical application. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 7, pt 2.
9. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Метод усреднения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.