

ПРОСТЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е. А. ПУШКАРЬ

(Москва)

Составной частью решения задач об обтекании угла в рамках магнитной гидродинамики, пересечении или стационарном отражении магнитогидродинамических ударных волн, а также стационарных задач, содержащих ионизирующую ударную волну, является стационарное решение уравнений магнитной гидродинамики, не зависящее от длины, а зависящее от комбинации пространственных переменных, например от угла. Течения, описываемые такими решениями, называются стационарными простыми волнами, впервые они были рассмотрены в [1], где было исследовано поведение течения в стационарных вращательных простых волнах, в которых не происходит изменения плотности. Для магнитного поля, параллельного скорости, были найдены первые интегралы и решение сведено к квадратурам.

Исследования и приложения полученных решений для качественного построения задач обтекания были продолжены [2-8]. В частности, были решены задачи об обтекании тонких тел потоком проводящего идеального газа. Общее решение задачи обтекания или пересечения ударных волн не было найдено из-за того, что стационарные простые волны с магнитным полем, не параллельным скорости потока, не были исследованы. Необходимость расчета такого течения может возникнуть при истолковании результатов экспериментов [9] по течению ионизированного газа.

В настоящей работе рассматриваются стационарные простые волны с магнитным полем, не параллельным скорости потока. Качественно исследуется система трех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих быстрые и медленные простые волны. На основе построенной картины поведения интегральных кривых находится изменение плотности, магнитного поля и скорости, проводится классификация волн по характеру изменения в них физических величин. Выяснена связь волн с уходящими и приходящими характеристиками. Обнаружено качественное отличие исследованного течения от течения в магнитном поле, параллельном скорости потока.

1. Рассмотрим плоские стационарные адиабатические движения идеального бесконечно проводящего газа, когда перпендикулярные составляющие скорости v_z и магнитного поля H_z равны нулю. Будем считать, что все величины зависят только от угла φ , отсчитываемого в плоскости (x, y) , и не зависят от координаты z . Тогда в цилиндрической системе координат (r, φ, z) система уравнений магнитной гидродинамики запишется в виде [10]

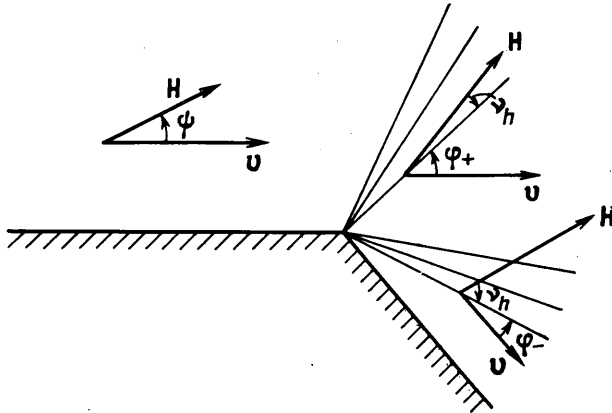
$$\begin{aligned} H_\varphi' + H_r &= 0 \\ v_r' H_\varphi + v_r H_\varphi' - v_\varphi' H_r - v_\varphi H_r' &= 0 \\ \rho v_r + \rho v_\varphi' + v_\varphi \rho' &= 0 \\ 4\pi \rho v_\varphi (v_r' + v_\varphi) &= H_\varphi (H_r' - H_\varphi) \\ \rho v_\varphi (v_\varphi' + v_r) &= -(p + H^2/8\pi), \quad p = C_0 \rho^\gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v_r , v_φ , H_r , H_φ — соответственно радиальная и угловая составляющие скорости и магнитного поля, ρ — плотность, p — давление. Штрихом обозначены производные по φ .

Система (1.1) представляет собой линейную относительно производных неоднородную систему, определитель которой Δ имеет вид

$$\Delta = v_{\varphi} \left(v_{\varphi}^2 - \frac{H_{\varphi}^2}{4\pi\rho} \right) \left[v_{\varphi}^4 - \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + a^2 \right) v_{\varphi}^2 + a^2 \frac{H_{\varphi}^2}{4\pi\rho} \right]$$

где $a = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ — газодинамическая скорость звука. Разрешая систему (1.1) по правилу Крамера, найдем, что определитель для производной от плот-



Фиг. 1

ности тождественно равен нулю. Таким образом, если $\Delta \neq 0$, то изменения плотности не происходит и можно показать, что в этом случае решение представляет собой однородный поступательный поток в магнитном поле.

Рассмотрим решения, отличные от поступательного потока, в них $\Delta = 0$. Если $v_{\varphi}^2 = H_{\varphi}^2 / 4\pi\rho$, то в этом случае $\text{div } v = 0$, $\rho = \text{const}$ и решение представляет собой стационарную вращательную простую волну [1], являющуюся аналогом нестационарной вращательной или альфвеновской простой волны. Таким образом, для изменения плотности в волне необходимо, чтобы

$$(1.2) \quad v_{\varphi}^4 - \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + a^2 \right) v_{\varphi}^2 + a^2 \frac{H_{\varphi}^2}{4\pi\rho} = 0$$

Это соотношение — алгебраический интеграл системы (1.1), показывающий, что нормальная к лучу $\varphi = \text{const}$ скорость равна одной из скоростей звука (быстрой или медленной), т. е. прямые $\varphi = \text{const}$, как и в газовой динамике, являются характеристиками. Система (1.1) имеет еще один интеграл

$$(1.3) \quad |v| \cdot |H| \sin \psi = E$$

который выражает постоянство электрического поля перпендикулярно плоскости течения. Здесь ψ — угол между полем и скоростью (фиг. 1). Введем безразмерные переменные по следующим формулам:

$$K = \frac{v_{\varphi}^2}{a^2}, \quad L = \frac{a_A^2}{v_{\varphi}^2} = \frac{H_{\varphi}^2}{4\pi\rho v_{\varphi}^2}, \quad R = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad a^2 = \frac{\gamma P}{\rho} = C_0 \gamma \rho_0^{\gamma-1}$$

$$M = \frac{v}{a}, \quad N = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho a}}, \quad C = \frac{E}{\sqrt{4\pi\rho_0 a_0}}, \quad a_0^2 = C_0 \gamma \rho_0^{\gamma-1}$$

где M — число Маха, N — число Альфвена, K — текущее значение квадрата числа Маха перпендикулярно характеристике, L — отношение квадратов

нормальной к характеристике альфвеновской скорости и угловой скорости. В дальнейшем угол между скоростью и магнитным полем будем обозначать через φ (фиг. 1).

Используя два интеграла (1.2), (1.3) и введенные безразмерные переменные, разрешим систему (1.1) в виде

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{dK}{d\varphi} &= -2K\{(2-\gamma)(1-K) + (\gamma+1)L\}F + (2-\gamma)(1-K)C\}D^{-1} \\ \frac{dL}{d\varphi} &= 2L\{KF + [2(1-K) + \gamma(L-1)]C\}D^{-1} \\ \frac{dR}{d\varphi} &= 2R\{KF + (K-L)C\}D^{-1} \\ F &= \text{sign}(H, v_\varphi) R^\nu \sqrt{K(K-1)(1-L)}, \quad \nu = \gamma - 0.5 \\ D &= \text{sign}(H_\varphi v_\varphi) K \sqrt{L} R^\nu [(2-\gamma) - 3K + (\gamma+1)L] \end{aligned}$$

При исследовании системы (1.4) будем считать, что безразмерное электрическое поле фиксировано и положительно, $C = \text{const}$, $C > 0$. Тогда, выбирая в качестве начальных данных различные R , будем получать разное начальное электрическое поле. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $v_\varphi < 0$, так что течение происходит по часовой стрелке. Областью физического существования решения является область $K \geq 0$, $L \geq 0$, $R \geq 0$. Действительные характеристики существуют при $(K-1)(1-L) \geq 0$. Случай $K \geq 1$, $0 \leq L \leq 1$ соответствует быстрым волнам, у которых скорость по нормали к характеристике равна быстрой магнитозвуковой скорости, а случай $0 \leq K \leq 1$, $L \geq 1$ соответствует медленным волнам, у которых скорость по нормали к характеристике равна медленной магнитозвуковой скорости. В пространстве переменных (K, L, R) изменение величин в быстрых и медленных волнах происходит в различных областях, соприкасающихся вдоль прямой $K=1$, $L=1$, которая соответствует вращательным простым волнам.

Ввиду того что все правые части системы (1.4) содержат множитель $2/D$, причем D может обращаться в нуль только на границах областей существования решения, можно ввести новую независимую переменную τ , определяемую соотношением $d\tau = 2d\varphi/D$. При этом преобразовании интегральные кривые в пространстве (K, L, R) не изменяются, а может измениться только их направление. В дальнейшем при исследовании системы (1.4) будем считать независимой переменной τ , а производные по τ обозначать точкой.

2. Исследуем поведение интегральных кривых системы (1.4). Для этого необходимо [11, 12]: 1) исследовать поведение системы в плоскостях, служащих границами области определения; 2) исследовать особые точки; 3) определить направление изменения (убывание или возрастание) переменных K , L и R вдоль интегральных кривых.

Плоскость $K=1$, $R=C_1 L^{-\gamma}$ есть особое решение системы (1.4), так как на плоскости $K=1$ не выполнено условие Липшица и $K=1$ — плоскость неединственности решений, однако $v_\varphi^2 = a^2$ не является решением (1.1), это побочное решение, появившееся в результате предлагаемого разрешения системы (1.1). При $H_r > 0$, $H_\varphi < 0$ интегральные кривые отходят от плоскости $K=1$, а при $H_r < 0$, $H_\varphi < 0$ приходят на плоскость $K=1$. В окрестности особой плоскости $K=1$ необходимо разрешать (1.1). Анализ показывает, что интегральная кривая исходной системы, отображенная в пространстве (K, L, R) , проходит с касанием через плоскость $K=1$, при этом знак H_r меняется на противоположный.

Плоскость $R=0$ является решением (1.4), но не является решением (1.1), однако при малых R интегральные кривые ведут себя подобно поведению при $R=0$, где вид интегральных кривых полностью определяется следующими особыми точками: $K=1, L=0$ — седловая особая точка, сепаратриссы которой направлены вдоль прямой $K=1$ (входящие) и вдоль оси K (выходящие); $K=1, L=1$ — узловая особая точка, собственные направления $L=1+(K-1)/(\gamma-1)$ и $K=1$; $K=0; L=0$ — седло, сепаратриссами которого являются оси координат; особая точка на бесконечности на оси L — дикритический узел, так что при бесконечно возрастающем L K стремится к определенному значению, которое для каждой интегральной кривой свое.

Плоскость $K=0$ является решением (1.4), при этом $R=C_1(2-\gamma+\gamma L)^{1/\gamma}$. Плоскость $L=0$ есть решение (1.4), в области $K>1$ интегральные кривые имеют вид $R=C_1(K-1)^{1/(2-\gamma)}$. При $H_r>0$ в плоскости $L=0$ имеется особая кривая, состоящая из особых точек $R^{\gamma}\sqrt{K(K-1)}=C$. В каждой точке особой кривой проекции интегральных кривых на плоскость, перпендикулярную особой кривой, имеют вид узла, одно из входящих направлений которого лежит в плоскости $L=0$. $L=0$ не является решением (1.1), поэтому в окрестности особой линии ($L=0$ соответствует $H_{\phi}=0$) необходимо разрешать (1.1). Анализ (1.1) показывает, что интегральная кривая, отображенная в пространство (K, L, R) , проходит через особую точку на кривой $F+C=0$ при конечном изменении ϕ , так что направление интегральных кривых (1.4) меняется на противоположное вместе со знаком H_{ϕ} .

Плоскость $L=1$ не является решением (1.4). При $H_{\phi}<0$ интегральные кривые входят на этой плоскости в область быстрых волн, а при $H_{\phi}>0$ — в область медленных волн.

Точка $(1, 0, 0)$ является изолированной особой точкой системы (1.4), у нее два исходящих собственных направления (вдоль оси K и прямой $L=0, K=1$) и одно входящее (вдоль прямой $R=0, K=1$), в плоскостях $K=1$ и $R=0$ интегральные кривые ведут себя как около седла, а в плоскости $L=0$ как около узла.

Из особых точек состоит прямая $K=1, L=1$. Линеаризуя (1.4) в окрестности точки $(1, 1, R_0)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= -[\mp(\gamma+1)R_0^{\gamma}\sqrt{-\kappa\lambda} - (2-\gamma)\kappa C] \\ \dot{\lambda} &= \mp R_0^{\gamma}\sqrt{-\kappa\lambda} + (-2\kappa + \gamma\lambda)C \\ \dot{r} &= R_0[\mp R_0^{\gamma}\sqrt{-\kappa\lambda} + (\kappa - \lambda)C] \end{aligned} \tag{2.1}$$

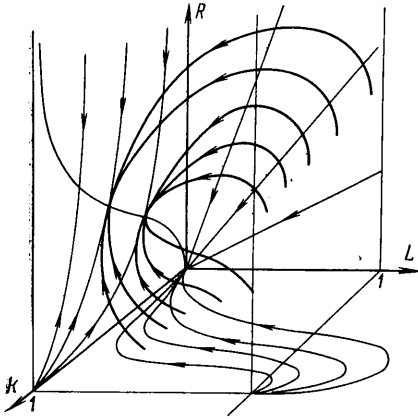
где $\kappa=K-1, \lambda=L-1, r=R-R_0$, знаки минус и плюс перед корнем относятся соответственно к случаям $H_r>0$ и $H_r<0$. Поскольку правые части (2.1) не зависят от r , то исследование особой точки сводится к исследованию первых двух уравнений (2.1) (особая точка на плоскости), а r определяется из последнего уравнения (2.1) квадратурой. Картина поведения интегральных кривых в случаях $H_r>0$ и $H_r<0$ в окрестности $(0, 0)$ для переменных κ, λ совпадает с точностью до центральной симметрии относительно начала координат. Характеристические направления (кроме $\kappa=0$) определяем, подставляя $\sqrt{-\lambda}=\sigma\sqrt{\kappa}$ (для быстрых волн) или $\sqrt{\lambda}=-\sigma\sqrt{-\kappa}$ (для медленных волн) в (2.1). Для σ получаем уравнение

$$\pm(\gamma+1)\sigma^3 - 2(\gamma-1)S\sigma^2 \mp \sigma - 2S = 0$$

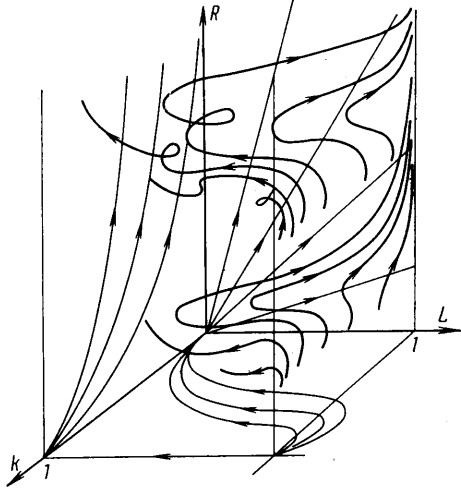
где $S=CR_0^{-\gamma}$. При $H_r>0$ в области быстрых волн имеем один положительный корень, а в области медленных волн либо два корня (при $R_0 \geq R_c$), либо ни одного. Область быстрых волн делится характеристическим на-

правлением на две подобласти: в первой интегральные кривые выходят из оси k , во второй с касанием отходят от оси L . В области медленных волн при $R_0 < R$, интегральные кривые ведут себя как около центра (выходят из оси k и входят с касанием в ось L), при $R_0 = R$, имеем седло — узел и при $R_0 > R$, имеем сложную картину, состоящую из узла, параболического и гиперболического секторов.

Дальнейшее исследование (1.4) проведем отдельно для быстрых и медленных волн. Построим интегральные кривые быстрых волн в предположении $H_\varphi < 0$. Если $H_\varphi > 0$, то направление интегральных кривых меняется



Фиг. 2



Фиг. 3

на обратное. Для этого сделаем замену переменных $K = 1/k$, при этом область быстрых волн отобразится в полунеограниченный по R параллелепипед $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq L \leq 1$, $R \geq 0$. Тогда плоскость $k=0$ — решение преобразованной системы (1.4), в плоскости $k=0$ имеем $R=C_1L$, $(0, 0)$ — дикритический узел, в плоскости $R=0$ начало координат — узел, интегральные кривые входят в него с касанием по оси k . Прямая $k=0$, $R=0$ состоит из особых точек, интегральные кривые не входят в эту прямую. Прямая $k=0$, $L=1$ исследуется аналогично прямой $K=1$, $L=1$. При $H_r > 0$ интегральные кривые ведут себя как около седла, при $H_r < 0$ — как около узла.

Исследуя правые части (1.4), найдем, что при $H_r < 0$ $R > 0$, а при $H_r > 0$ $L < 0$ в области быстрых волн. При $H_r > 0$ поверхности $\dot{k}=0$ и $\dot{R}=0$ пересекаются только в особой линии на плоскости $L=0$, а при $H_r < 0$ поверхности $\dot{k}=0$ и $\dot{L}=0$ пересекаются внутри области при достаточно больших R .

Таким образом, при $H_r > 0$, $H_\varphi < 0$ интегральные кривые могут быть двух типов: а) исходят из плоскости $L=1$, так что R возрастает, а k убывает, достигается максимум по R , затем минимум по k , после чего интегральные кривые входят в особые точки в плоскости $L=0$; б) с касанием отходят от плоскости $k=1$ и входят в особые точки в плоскости $L=0$. Примерный вид интегральных кривых изображен на фиг. 2.

При $H_r < 0$, $H_\varphi < 0$ интегральные кривые начинаются на плоскости $L=1$ и либо асимптотически стремятся к особой прямой $k=0$, $L=1$, либо заканчиваются на плоскости $k=1$ или в особой прямой $k=1$, $L=1$, причем при малых R число локальных экстремумов по k и L на интегральных кривых

невелико, а при больших R кривые приобретают петлеобразный характер. Примерный вид интегральных кривых изображен на фиг. 3.

Общие интегральные кривые быстрых волн получаются при склейке построенных ранее разных типов интегральных кривых на плоскостях $L=0$ и $k=1$ с соответственным изменением знаков H_φ и H_r . Например, при $H_r > 0$, $H_\varphi < 0$ интегральные кривые начинаются на плоскости $L=1$ и входят в особую кривую на $L=0$, знак H_φ меняется и меняется направление построенных выше интегральных кривых, вдоль интегральной кривой попадаем на плоскость $k=1$, где меняется знак H_r и интегральные кривые сопрягаются с построенными для $H_r < 0$, по которым попадаем на плоскость $L=1$, где $v_\varphi = a_+ = a_-$, к быстрым волнам можно непосредственно пристраивать отражательные волны или поступательный поток.

Аналогично, сделав в (1.4) замену $L=1/l$, можно построить интегральные кривые медленных волн. Отметим их следующие особенности: при $H_r > 0$, $H_\varphi > 0$ интегральные кривые начинаются на плоскости $l=1$ и заканчиваются либо в особой прямой $l=0$, $R=0$, либо на плоскости $K=1$, либо в особой прямой $K=1$, $l=1$, причем всюду $\dot{R} < 0$; при $H_r < 0$, $H_\varphi > 0$ все интегральные кривые заканчиваются в особой прямой $l=0$, $R=0$, а начинаются либо на плоскости $K=1$, либо на плоскости $l=1$. Интегральные кривые входят в особые точки при конечном изменении φ . Интегральные кривые общего вида либо состоят из интегральных кривых, на которых H_r и H_φ знакоопределены, либо получаются склейкой на плоскости $K=1$, где пользоваться уравнениями (1.4) нельзя, а необходимо разрешать (1.1). При этом знак H_r меняется на противоположный. Знак H_φ в медленных волнах измениться не может. Таким образом, на предельной характеристике у волн с $H_\varphi > 0$ плотность равна нулю, а у волн с $H_\varphi < 0$ скорость по нормали к предельной характеристике равна альфвеновской, плотность отлична от нуля.

3. Исследуем характеристики простых стационарных волн и их связь с начальными данными. Для решения некоторой задачи отбегания или поворота течения необходимо задать поток, для чего достаточно задать число Маха M , число Альфвена N и угол между полем и скоростью ψ , тогда тангенс угла наклона характеристики к линии тока определится из уравнения [10]

$$(3.1) \quad \operatorname{tg}^4 \varphi [M^4 + N^2 \cos^2 \psi - M^2(1 + N^2)] - 2 \operatorname{tg}^3 \varphi N^2 \sin \psi \cos \psi + + \operatorname{tg}^2 \varphi [N^2 - M^2(1 + N^2)] - 2 \operatorname{tg} \varphi N^2 \sin \psi \cos \psi + N^2 \sin^2 \psi = 0$$

откуда φ , соответствующее различным типам волн и разным видам характеристик, определяется довольно сложно, после чего K и L на начальной характеристике выражаются следующим образом:

$$(3.2) \quad K = M^2 \sin^2 \varphi, \quad L = N^2 M^{-2} \sin^2 (\varphi - \psi) \sin^{-2} \varphi$$

Можно однозначно решить обратную задачу: задав знаки H_r и H_φ , электрическое поле (постоянную C в (1.4)), определить каким M , N , ψ и φ соответствует точка (K, L, R) . Для этого разрешим (3.1) и (3.2) относительно M , N , ψ и φ , воспользовавшись тем, что $MN \sin \psi = CR^{-\nu} = S$

$$(3.3) \quad M = \sqrt{K} / \sin \varphi, \quad N = \operatorname{sign}(H_\varphi) \sqrt{KL} / \sin (\psi - \varphi) = K + L - 1$$

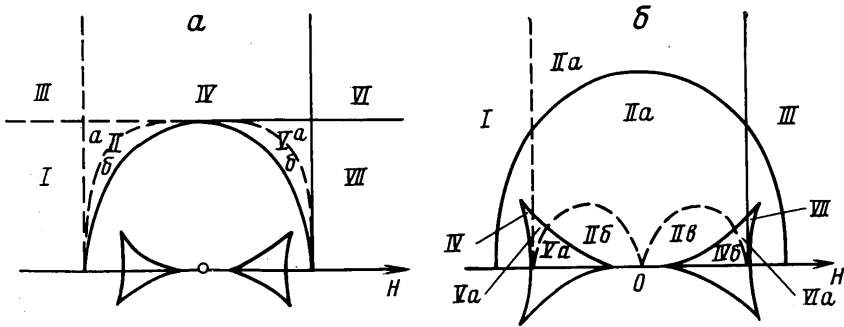
$$(3.4) \quad \sin^2 (\varphi - \psi) = KL(K + L - 1)^{-1}$$

$$(3.5) \quad \sin^2 \psi = S^2 \sin^2 \varphi / K(K + L - 1)$$

Рассматривая (3.4) и (3.5) как систему для ψ и φ и предполагая, что $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ («стенка» находится справа от потока, магнитное поле

выходит из стенки), можно однозначно определить зависимости ψ и φ от K , L и R для разных наборов знаков H_r и H_φ .

Область на диаграмме Фридрикса [10], где течение имеет гиперболический тип, по знакам H_r и H_φ как на уходящих, так и на входящих характеристиках разобьем на семь областей (фиг. 4, а), при этом входящая характеристика трактуется так, что для нее $0 \leq \varphi \leq \pi$. Области II и V разбиты на две подобласти пунктирной линией, на которой скорость перпендикулярна одной из характеристик, так что в области IIб как входящая,



Фиг. 4

так и уходящая характеристики быстрых волн направлены вверх по потоку, а в области Vб обе характеристики направлены вниз по потоку.

Аналогично тому как это сделано для быстрых волн, диаграмму Фридрикса для медленных волн можно разбить на семь областей (фиг. 4, б), отличающихся не только знаками H_r и H_φ , но и числом характеристик. В областях I—III течение имеет эллиптикогиперболический тип (две характеристики), в областях IV—VII квазигиперболический тип (четыре характеристики). В области IIб обе характеристики (входящая и уходящая) направлены вниз, а в области IIв — вверх по потоку, а в областях Vб и VIб имеются как уходящие, так и входящие характеристики, направленные вниз по потоку.

Наклоны входящей и уходящей характеристик совпадают, если уравнение (3.1) имеет кратный корень. В этом случае одновременно выполнено соотношение (3.1) и его производная по $\operatorname{tg} \varphi$. Используя (3.3)–(3.5), найдем, что условие кратности корня для $\operatorname{tg} \varphi$ в переменных K и L при фиксированном S совпадает с условием обращения в нуль производной от безразмерной плотности $R' = 0$

$$(3.6) \quad \operatorname{sign}(H, v_\varphi) KR^v \sqrt{K(K-1)(1-L)} + (K-L)C = 0$$

Принимая во внимание это условие и рассматривая знаки H_r и H_φ в различных областях диаграммы Фридрикса (фиг. 4), найдем, что уходящим характеристикам соответствуют волны разряжения ($d\rho < 0$), а входящим — волны сжатия ($d\rho > 0$). Отметим, что имеются быстрые волны разряжения, направленные вверх по потоку (область IIб на фиг. 4, а). Ввиду симметрии диаграммы Фридрикса относительно $\psi = \pi/2$ уходящей характеристике при $\psi_1 < \pi/2$ в симметричной точке ($\psi_2 = \pi - \psi_1$) соответствует входящая характеристика с противоположным знаком у H_φ и наоборот уходящей характеристике при $\psi_1 > \pi/2$ в симметричной точке ($\psi_2 = \pi - \psi_1$) соответствует входящая характеристика с противоположным знаком у H_φ .

4. Найдем изменение физических величин в простых стационарных волнах. Абсолютная величина магнитного поля H , модуль скорости v , угол между полем и характеристикой ν_h выражаются как функции K , L и R

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{R^2(K+L-1)}{N_0^2}, \quad \sin \nu_h = \pm \sqrt{\frac{KL}{K+L-1}}$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{(K+L-1)KR^{2\gamma-1} + 2CK\sqrt{(K-1)(1-L)} + C^2}{M_0^2 KLRv}$$

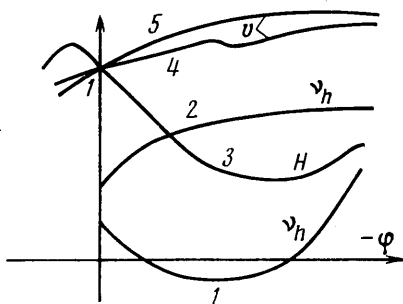
знаки перед корнями зависят от знаков H_r и H_ϕ . Из (1.1) получим, что изменение полного давления $p + H^2 / 8\pi$ связано с изменением плотности: $d(p + H^2 / 8\pi) / d\phi = v_\phi^2 d\rho / d\phi$, так что знак изменения полного давления совпадает со знаком изменения плотности.

Зная характер поведения интегральных кривых и построив семейства поверхностей $H = \text{const}$, $v = \text{const}$, $\nu_h = \text{const}$, найдем изменение физических величин вдоль интегральных кривых.

В быстрых волнах изменение величин происходит следующим образом. На интегральных кривых, получающихся с помощью склейки, вначале вместе с ростом плотности модуль магнитного поля возрастает, а затем в волнах разряжения убывает, угол между полем и характеристикой монотонно растет от $-\pi/2$ (при $H_r = 0$) до 0 (при $H_\phi = 0$). После изменения знака у H_r абсолютная величина поля уменьшается и при малых H_r почти не изменяется, ν_h возрастает до $\pi/2$. Чем меньше электрическое поле, тем больше изменяется модуль поля. После изменения знака у H_r модуль поля возрастает, а ν_h достигает наибольшего значения и убывает до $\pi/2$, на предельной характеристике $v_\phi = a_+ = a_-$.

При достаточно больших начальных углах ψ_0 между полем и скоростью угол между полем и полярной осью возрастает, причем существует предельный угол, а при малых ψ_0 угол между полем и осью вначале уменьшается, достигая наименьшего значения при $H_\phi = 0$. Модуль скорости в волнах разряжения, вообще говоря, возрастает, однако около $H_\phi = 0$ может наблюдаться немонотонность. Угол между полем и скоростью монотонно растет. На диаграмме Фридрикса (фиг. 4, а) интегральные кривые идут из области I через области II—VI в область VII. На предельной характеристике криволинейные треугольники на диаграмме Фридрикса сливаются с частью овала, где и заканчиваются интегральные кривые. На фиг. 5 представлены зависимости H , v , ν_h от угла наклона характеристик, кривые 1, 2 описывают изменение ν_h , соответствующее различным электрическим полям, 3 — изменение модуля H , 4, 5 — модуля скорости.

Уходящие характеристики медленных волн могут быть двух типов: одна из характеристик имеется при любом типе течения, а другая только при квазигиперболическом типе течения (области IV—VII на фиг. 4, б). Волны, соответствующие первому типу характеристик, назовем эллиптическими, а волны, соответствующие второму типу характеристик, — гиперболическими. В областях IV—V гиперболические волны расположены



Фиг. 5

выше по течению, чем эллиптические, а в областях VI—VII наоборот. В медленных волнах знак H_ϕ измениться не может, во всех волнах, соответствующих уходящим характеристикам, $H_\phi > 0$, кроме гиперболических волн в областях IV—V, у которых $H_r < 0$, $H_\phi < 0$.

В медленных волнах эллиптического типа абсолютная величина магнитного поля вначале возрастает, а затем почти постоянна. С ростом числа Маха по нормали к характеристике относительное изменение поля уменьшается. Наклон поля к полярной оси вначале уменьшается, а затем возрастает, конечный угол может превзойти начальный, с увеличением магнитного поля максимальный поворот поля уменьшается. Модуль скорости вначале убывает, а затем растет, с увеличением числа Маха возрастание скорости уменьшается. В волнах гиперболического типа магнитное поле по модулю растет, угол между полем и скоростью и между полем и полярной осью уменьшается, модуль скорости возрастает. Угол между полем и осью в медленных волнах гиперболического типа меняется гораздо быстрее по сравнению с волнами эллиптического типа при соответственном повороте скорости.

Простые стационарные волны в наклонном поле качественно отличаются от волн с полем, параллельным скорости. При поле, параллельном скорости, в быстрых волнах максимальной интенсивности плотность равняется нулю, а в медленных волнах разряжение до нуля невозможно, в то время как при наличии наклонного поля в быстрых волнах разряжение до нуля невозможно, а среди медленных волн наряду с волнами, в которых плотность не может уменьшаться до нулевой, возможны волны, на предельной характеристике которых плотность равна нулю. Таким образом, волны в наклонном поле ведут себя подобно волнам Римана.

Автор благодарит А. А. Бармина и А. Г. Куликовского за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 1 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А. Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
2. Kato Y., Taniuti T. Hydromagnetic plane steady flow in compressible ionized gases. Progr. Theoret. Phys., 1959, vol. 21, No. 4.
3. Коган М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. 23, № 1.
4. Коган М. Н. Плоские течения идеального газа с бесконечной электропроводностью в магнитном поле, не параллельном скорости потока. ПММ, 1960, т. 24, № 1.
5. McCune J. E., Resler E. L. Compressibility effects in magnetoaerodynamic flows past thin bodies. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, No. 7.
6. Resler E. L., McCune J. E. Electromagnetic interaction with aerodynamic flows. The magnetodynamic of conducting fluids. Stanford Univ. Press., 1959.
7. Chu C. K., Lynn Y. M. Steady magnetohydrodynamic flow past a nonconducting wedge. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 5. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1, № 5.)
8. Chu C. K. Linearized hyperbolic steady magnetohydrodynamic flow past nonconducting walls. Phys. Fluids., 1964, vol. 7, No. 5.
9. Glass I. J., Igra O. Corner-expansion flow of ionized argon. In.: Dynamic Ionized Gases. Tokyo, 1973, pp. 449—460.
10. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
11. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
12. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.