

ЗАТУХАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В КАНАЛАХ
СО «ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИМИ» СТЕНКАМИ

А. Н. КРАЙКО, А. А. ОСИПОВ

(Москва)

Решены две задачи о затухании бесконечных периодических (во времени или в пространстве) последовательностей возмущений, содержащих слабые скачки уплотнения и распространяющихся против потока. В первой задаче возмущения задаются как периодические функции времени в некотором «начальном» сечении цилиндрического канала. Во второй задаче рассматривается двумерное и, вообще говоря, нестационарное течение в слое между двумя параллельными плоскостями — «боковыми» стенками. В то же время это течение таково, что в специально ориентированной прямоугольной системе координат, движущейся с постоянной скоростью параллельно боковым стенкам, оно стационарно и периодически по переменной, которая отсчитывается вдоль оси, параллельной направлению движения указанной системы координат. Подобного рода течение возникает, например, перед бесконечной периодической решеткой плоских профилей в случае, когда полная скорость набегающего потока сверхзвуковая, а ее составляющая, нормальная к фронту решетки, — дозвуковая.

Анализ проводится в приближении идеального, т. е. невязкого и нетеплопроводного газа. При этом рассматриваются два одновременно действующих эффекта: нелинейное искажение профиля волны и «звукопоглощающее» действие специальных пористых покрытий стенок. Первый эффект учитывается так же, как в [1-4]. Учет второго проводится в рамках упрощенной «импедансной» модели, которая широко применяется в исследованиях по акустике гармонических колебаний в каналах [5]. В упрощенной модели отсутствует относительное запаздывание возмущения давления и нормальной к стенке компоненты скорости газа, которые принимаются просто пропорциональными друг другу (в акустической терминологии это означает, что «проводимость» стенки считается действительной величиной). На первом этапе для оценки воздействия звукопоглощающих покрытий на затухание возмущений, содержащих ударные волны, использование такой упрощенной модели представляется вполне оправданным. В дальнейшем указанная модель потребует усовершенствования. Кроме того, при рассмотрении нелинейных эффектов введение уточнений, предложенных в [6], может расширить диапазон применимости теории в направлении больших интенсивностей ударных волн.

Отметим, что исследованию влияния звукопоглощающего покрытия на затухание гармонических волн в цилиндрических каналах в линейном («акустическом») приближении посвящено большое число работ (см. обзор [5]). В то же время известные работы (например, [7]), авторы которых пытаются одновременно учесть эффекты нелинейности и звукопоглощения, относятся только к возмущениям, не содержащим ударных волн.

1. Пусть по цилиндрическому каналу слева направо (в отрицательном направлении оси x) течет газ, проекция скорости которого на ось x по модулю меньше скорости звука a . В противоположном направлении по каналу от некоторого «начального» сечения, которое совместимо с началом отсчета x , распространяются возмущения, содержащие слабые скачки уплотнения. В сечении $x=0$ распределения параметров задаются как периодические функции времени t . Ограничимся случаем, когда для сечения $x=0$, а следовательно, и для любого сечения $x=\text{const}>0$ временной интервал между двумя следующими друг за другом ударными волнами совпадает с периодом возмущений, а распределения по t параметров при $x=0$ таковы, что в процессе распространения возмущений по каналу в них не возникает других ударных волн.

Стенки канала покрыты специальным пористым материалом, который обладает звукопоглощающими свойствами. Это, а также нелинейное искажение профиля волны ведет к затуханию возмущений с удалением от начального сечения. В результате при $x \rightarrow \infty$ поток становится невозмущенным, а траектории ударных волн вырождаются в характеристики. Параметрам такого невозмущенного потока будем приписывать нижний индекс ∞ .

Если даже возмущения, уходящие от сечения $x=0$, представляют собой плоские волны, то из-за взаимодействия возмущений с покрытием течение приобретает пространственный (или в случае канала кругового сечения — двумерный) характер. Отметим сразу, что достаточно аккуратное описание подобного течения в рамках одномерного приближения для идеального газа и «импедансной» модели, учитывающей свойства только звукопоглощающего покрытия, вряд ли возможно. Действительно, в указанной модели считается, что покрытие «вбирает» в себя газ, если давление в канале p превышает свое невозмущенное значение p_∞ , и «выделяет» — в противном случае, причем всегда нормальная к стенке компонента скорости газа v_n предполагается малой.

Известно (см., например, [8]), что в те моменты, когда газ течет к стенке ($v_n > 0$), на ней требуется выставлять одно граничное условие. В качестве такого условия можно взять используемую в акустике линейную связь («импедансное» условие) между v_n и $\Delta p \equiv p - p_\infty$. Если $v_n < 0$, то кроме указанной связи на стенке необходимо задавать касательную к ней компоненту скорости u и удельную энтропию s . Так как внутри пористого материала газ не может иметь значительных скоростей, то ясно, что скорость u газа, вытекающего из покрытия, будет существенно меньше, чем u_∞ . В результате у стенки образуется некоторый достаточно тонкий пристеночный слой, внутри которого предположение о малости возмущений параметров потока несправедливо. При этом использование акустических подходов становится возможным, если только предположить, что импедансное условие описывает акустическую реакцию системы покрытие + пристеночный слой.

Возможен и другой подход, при котором исходный, т. е. невозмущенный профиль скорости включает в себя пограничный слой, образующийся около стенки. Так как в таком случае скорость газа на стенке в невозмущенном потоке равна нулю, то здесь достаточно рассматривать акустические свойства одного лишь покрытия. При этом, однако, применение процедуры осреднения ко всему потоку и обычных предположений о связях между средними параметрами, которые всегда делаются при построении одномерного приближения, существенно снижает его точность. Последнее связано с двумя причинами: существенной неоднородностью исходных стационарных параметров и пространственной картиной нестационарных возмущений (вторая причина возникает как следствие первой, в частности, из-за различия скоростей распространения возмущений по пограничному слою и по ядру потока).

Поэтому при построении одномерного приближения процедуру осреднения будем применять лишь к ядру потока, считая, что акустические свойства покрытия и пристеночной области, включающей в себя пограничный слой, можно описать в рамках упомянутой выше упрощенной импедансной модели. Хотя некоторым основанием для этого могут служить результаты, полученные в [9], тем не менее на данный подход следует смотреть, как на весьма грубую схематизацию действительного явления, аккуратное описание которого требует исследования пространственного течения в канале, в пристеночном слое и в покрытии. Естественно, что принятая схема имеет смысл лишь в случаях, когда пограничные слои тонкие, а амплитуда нестационарных возмущений мала. В противном случае разделение потока на ядро и на пристеночный слой не приводит к каким-либо упрощениям.

Заметим, наконец, что все сделанные выше оговорки обусловлены сложностями, которые связаны с истечением газа из покрытия. Применение той же схемы и полученных при ее помощи результатов к задаче о течении идеального газа в каналах с деформируемыми стенками не требует дополнительных обоснований.

Итак, не пытаюсь построить полную пространственную картину течения, исследуем поведение средних (по площади поперечного сечения канала) параметров, которые будут функциями только двух переменных (t и x). В согласии со сказанным выше будем считать, что весь поток можно разделить на ядро и на тонкий пристеночный слой. Наличие и свойства последнего влияют только на величину импеданса Z — коэффициента в линейной связи (ρ — плотность газа)

$$(1.1) \quad v_n = (p - p_\infty) / Z \rho_\infty a_\infty$$

между нормальной к стенке составляющей вектора скорости газа и возмущением давления.

Условие (1.1) ставится на границе ядра течения, которую, однако, при рассмотрении течения в ядре ввиду малой толщины пристеночного слоя можно считать совпадающей со стенкой канала. В то же время в согласии с принятыми допущениями все параметры потока на границе ядра (в частности, u , s и т. д.) отличаются от своих невозмущенных значений на величины порядка Δp . Учитывая это, проведем осреднение уравнений пространственного течения в ядре по поперечному сечению канала. Сделав обычные предположения о связях между средними величинами и отбросив члены порядка $(\Delta p)^2$, придем к следующей системе, описывающей изменение средних параметров в подобластях их непрерывности:

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + q = 0, \quad \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Ds}{Dt} = 0$$

$$\left(q = \frac{2\rho v_n}{R}, \quad R = \frac{2F}{P}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Здесь q — расход газа через границу ядра, приходящийся на единицу длины канала; F , P и R — площадь, периметр и «гидравлический» радиус поперечного сечения; D/Dt — оператор дифференцирования вдоль траектории частиц (c^0 — характеристики); v_n в формуле для q связано с давлением уравнением (1.1), в котором Z — заданная константа.

Первые два уравнения системы (1.2) можно переписать в следующей характеристической форме:

$$(1.3) \quad \frac{D^+u}{Dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{D^+p}{Dt} = -\frac{qa}{\rho}, \quad \frac{D^-u}{Dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{D^-p}{Dt} = \frac{qa}{\rho}$$

$$\left(\frac{D^+}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D^-}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

где D^+/Dt и D^-/Dt — операторы дифференцирования вдоль характеристик первого и второго семейств (c^+ - и c^- -характеристик).

Уравнения (1.2) и (1.3), справедливые в подобластях непрерывности параметров потока, следует дополнить условиями на скачках уплотнения. Известно, что для слабых скачков, распространяющихся против потока, эти условия сводятся к трем соотношениям, которые в случае совершенного газа с показателем адиабаты κ записываются в форме

$$(1.4) \quad \delta s \sim (\delta p)^3, \quad \delta l \sim (\delta \bar{p})^3, \quad d = 1/2 [(u+a)_+ + (u+a)_-]$$

$$(l = u - 2a / (\kappa - 1))$$

Здесь $\delta \varphi \equiv \varphi_+ - \varphi_-$ — разность значений параметра φ на скачке (индексы плюс и минус приписываются параметрам соответственно слева и справа от скачка, в силу чего $p_+ > p_-$); d — скорость скачка; l — левый инвариант Римана.

Как следует из третьего уравнения (1.2), удельная энтропия s сохраняется на участках траектории между двумя последовательными пересечениями частицей скачков уплотнения. Кроме того, в силу (1.4) приращение s на скачке пропорционально кубу интенсивности скачка, которую можно характеризовать, например, величиной δp . Чтобы найти приращение энтропии частицы при ее следовании от $x = -\infty$, нужно просуммировать

соответствующие приращения на бесконечном числе скачков, пересекаемых частицей. При этом более ранние (по времени) пересечения происходят при больших x . Поэтому, хотя таких пересечений бесконечно много, из-за затухания скачков при их удалении от начального сечения суммарное приращение s в любой точке канала может оказаться малым. Исходя из этого примем, что течение можно считать изэнтропическим. В дальнейшем на основе полученного решения это предположение может быть обосновано, причем можно показать, что $\Delta s = s - s_\infty \sim (\delta p)^2$, где δp — интенсивность последнего скачка, который частица пересекла перед попаданием в рассматриваемую точку.

В случае постоянной энтропии уравнения (1.3) переписываются в форме

$$(1.5) \quad \frac{D^+ r}{Dt} = -\frac{qa}{\rho}, \quad \frac{D^- l}{Dt} = \frac{qa}{\rho} \quad \left(r = u + \frac{2a}{\kappa - 1} \right)$$

где r — правый инвариант Римана (левый инвариант l был введен ранее).

В согласии с (1.4) приращение l на скачках имеет тот же порядок, что и приращение энтропии. Поэтому суммарное изменение l при прохождении c^- -характеристикой всех скачков уплотнения будет порядка $(\delta p)^2$. Это, однако, еще не позволяет считать, что во всем потоке $l \approx l_\infty$, так как правая часть второго уравнения из (1.5) отлична от нуля. Заметим, что из-за периодичности возмущений, бегущих вправо, q в указанном уравнении в различных точках c^- -характеристики будет иметь разный знак. Данное обстоятельство позволяет надеяться, что суммарное изменение l , обусловленное наличием соответствующей правой части, имеет порядок qaT/ρ , где T — период возмущения, а q — максимальное значение q на расстояниях порядка длины волны возмущения от рассматриваемой точки. Как и предположение о суммарном изменении s и l в скачках, данную оценку можно в дальнейшем обосновать прямым вычислением.

Ограничимся далее случаем, когда проводимость $\eta = 1/Z$ звукопоглощающего покрытия много меньше единицы, как это обычно и бывает. Тогда с точностью до величин порядка $(\delta p)^2$ и $\eta \delta p$ во всем потоке

$$(1.6) \quad s = s_\infty, \quad l = u - 2a / (\kappa - 1) = l_\infty$$

т. е. возмущения, распространяющиеся против потока, представляют собой последовательность простых волн, разделенных слабыми скачками уплотнения. В согласии с (1.6), (1.1) и формулой для q из (1.2) все параметры течения, а следовательно, и правая часть уравнения для r из (1.5) являются известными функциями r . Перейдя в (1.5) от t к x , выполнив линеаризацию и интегрируя полученное линейное уравнение от «начального» сечения $x=0$, где $r(0, t) = r_0(t)$, найдем, что вдоль c^+ -характеристик

$$(1.7) \quad \Delta r = \Delta r_0 \exp(-\epsilon x) \quad (\epsilon = \eta / R(1 - M_\infty))$$

Здесь и далее $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_\infty$, а число Маха определяется по модулю невозмущенной скорости (в данном случае $u_\infty < 0$ и $M_\infty = -u_\infty / a_\infty$). Кроме того, все величины будем считать безразмерными. При этом за единицу времени возьмем период T , величины с размерностью длины (в том числе «гидравлический» радиус) будем относить к произведению Ta_∞ , с размерностью скорости (в частности, инварианты Римана) — к a_∞ , плотность — к ρ_∞ и давление — к $\rho_\infty a_\infty^2$. При этом $\Delta p = \Delta r / 2$ и $\delta p = \delta r / 2$.

В безразмерных переменных уравнение любой c^+ -характеристики ($dt/dx = 1/(u+a)$) с точностью до малых первого порядка включительно имеет вид

$$(1.8) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1 - M_\infty} - \frac{1 + \kappa}{4(1 - M_\infty)^2} \Delta r$$

В согласии с (1.7) и (1.8) c^+ -характеристика, выходящая в момент $t=t^{\circ}(0)$ из точки начального сечения, в которой поток невозмущен ($r_0(t) = r_{\infty}$), представляет собой прямую: $t=t^{\circ}(0)+x/(1-M_{\infty})$. В плоскости xt точки $t=t^{\circ}(0)$ и «невозмущенные» характеристики в силу периодичности течения и выбора характерного времени получают друг из друга сдвигом в направлении оси t на произвольное целое число. Соответствующая картинка изображена на фиг. 1, где указанные характеристики даны штрихами.

Подставив в правую часть (1.8) Δr из (1.7) и интегрируя, полученное уравнение, найдем, что уравнение произвольной c^+ -характеристики имеет вид

$$(1.9) \quad t=t(x) \equiv t^{\circ}(\Delta r_0) + \frac{x}{1-M_{\infty}} - \frac{(1+\kappa)\Delta r_0}{4\varepsilon(1-M_{\infty})^2} (1-e^{-\varepsilon x})$$

где $t^{\circ}(\Delta r_0)$ — функция, обратная функции $\Delta r_0 = \Delta r_0(t)$, задающей профиль в начальном сечении.

Ограничимся далее начальными возмущениями, которые не только периодичны по t , но, кроме того, на каждом периоде таковы, что Δr_0 — нечетная монотонная функция $\tau = t - t^{\circ}(0)$, где $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$. В этих случаях, опираясь на третье равенство из (1.4), а также на формулы (1.7) и (1.9), можно показать, что траектории скачков уплотнения для всех $x > 0$ будут прямыми, параллельными невозмущенным характеристикам, как изображено на фиг. 1, где траектории скачков нанесены жирными сплошными линиями. Кроме того, в этом случае $\Delta r_+ = -\Delta r_-$ и, следовательно, $\delta r = r_+ - r_- = 2\Delta r_+$. Нетрудно сообразить, что $\Delta r_+ > 0$.

Уравнение (1.9) удобно переписать в форме

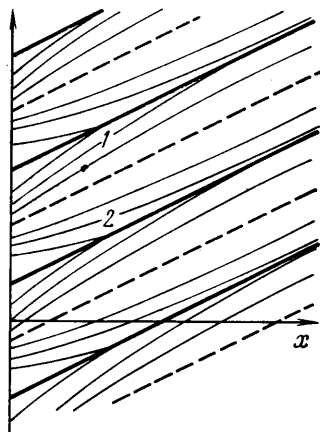
$$(1.10) \quad t=t(x) \equiv t^{\circ}(\Delta r_0) + Ax + B\Delta r_0$$

$$A = A(\kappa, M_{\infty}, \Delta r_0) = \frac{1}{1-M_{\infty}} - \frac{(1+\kappa)\Delta r_0}{4(1-M_{\infty})^2}$$

$$B = B(\kappa, M_{\infty}, \varepsilon, x) = \frac{1+\kappa}{4(1-M_{\infty})^2} \left(x - \frac{1-e^{-\varepsilon x}}{\varepsilon} \right)$$

причем функция B обращается в нуль при $\varepsilon=0$ и $x \geq 0$ и при $x=0$ и $\varepsilon \geq 0$. При положительных ε и x указанная функция, характеризующая влияние на форму c^+ -характеристик звукопоглощающих свойств покрытий, положительна. Поэтому при $\varepsilon > 0$ характеристики первого семейства не являются прямыми линиями, как при $\varepsilon=0$, а отклоняются от соответствующих прямых к невозмущенной характеристике (см. фиг. 1, на которой c^+ -характеристики даны тонкими сплошными кривыми).

Наличие последнего слагаемого в правой части (1.10) приводит к интересному качественному эффекту, который не наблюдается при $\varepsilon=0$. Этот эффект состоит в следующем. При $\varepsilon=0$ все c^+ -характеристики, расходясь от начального сечения веером, обязательно попадают на одну из ударных волн. Так как в этом случае Δr в силу (1.7) на каждой характеристике постоянно, то произвольное монотонное распределение Δr_0 в конце концов становится как угодно близким к линейному. Этот результат хорошо известен. При $\varepsilon > 0$ на скачки приходят лишь те характеристики, которые не попадают между двумя граничными характеристиками. Граничными являются характеристики, которые асимптотически приближаются к скачкам при



Фиг. 1

$x \rightarrow \infty$. В соответствии с этим и с (1.9) им отвечают Δr_0 , удовлетворяющие уравнениям

$$(1.11) \quad \tau^\circ(\Delta r_0) - \frac{(1+\kappa)\Delta r_0}{4\varepsilon(1-M_\infty)^2} \mp \frac{1}{2} = 0$$

Здесь $\tau^\circ(\Delta r_0)$ — функция, обратная $\Delta r_0 = \Delta r_0(\tau)$, знак минус (плюс) относится к верхней (нижней) граничной характеристике (на фиг. 1 эти характеристики отмечены цифрами 1 и 2).

По определению $\tau^\circ(0) = 0$, $\tau^\circ(\Delta r_{0-}) = 0.5$, а $\tau^\circ(\Delta r_{0+}) = -0.5$. Опираясь на это и используя нечетность и монотонность функции $\tau^\circ(\Delta r_0)$, можно показать, что уравнения (1.11) в соответствующих диапазонах изменения Δr_0 всегда имеют по одному корню, которые различаются только знаком. В силу этого профиль возмущения, затухая с ростом x , никогда не станет как угодно близким к линейному (если он не был линейным на участке между граничными характеристиками при $x=0$).

Найдем теперь закон затухания скачка с удалением от начального сечения. С этой целью возьмем две c^+ -характеристики, которые приходят в точку траектории скачка с координатой x с разных его сторон. Пусть Δr_{0-} и Δr_{0+} — значения Δr_0 соответственно на нижней и верхней указанных характеристиках. В согласии с (1.10) эти значения определяются уравнениями

$$(1.12) \quad \tau^\circ(\Delta r_{0\mp}) - \frac{(1+\kappa)\Delta r_{0\mp}}{4\varepsilon(1-M_\infty)^2} (1 - e^{-\varepsilon x}) \mp \frac{1}{2} = 0$$

Как и в случае (1.11), можно показать, что эти уравнения имеют для любого $x > 0$ по одному корню, причем $\Delta r_{0-}(x) = -\Delta r_{0+}(x)$. С ростом x корни (1.12) убывают по абсолютной величине. Используя далее формулу (1.7), найдем, что интенсивность скачка, измеряемая величиной $\delta r = r_+ - r_-$, с ростом x убывает по закону

$$(1.13) \quad \delta r(x) = 2\Delta r_{0+}(x) \exp(-\varepsilon x)$$

где $\Delta r_{0+}(x)$ — корень соответствующего уравнения из (1.12). В согласии с (1.13) при увеличении x интенсивность скачков падает из-за уменьшения как экспоненты, так и функции $\Delta r_{0+}(x)$.

Аналогичным образом для любого $x > 0$ строится профиль возмущения в зависимости от τ' , где τ' определяется так же, как τ в начальном сечении, и изменяется от -0.5 до $+0.5$. При этом $\Delta r = \Delta r(x, \tau')$ по-прежнему дается формулой (1.7), в которой $\Delta r_0 = \Delta r_0(x, \tau')$ — корень уравнения, получающегося из (1.12) после замены последнего слагаемого на $(-\tau')$. В частном случае линейного при $x=0$ профиля, когда $\Delta r_0(\tau) = -\tau \delta r_0$, где $\delta r_0 = \delta r(0)$ — начальная интенсивность скачка, поступая описанным выше образом, найдем, что

$$(1.14) \quad \Delta r(x, \tau') = -\tau' \delta r_0 \left[e^{\varepsilon x} + \frac{(1+\kappa)\delta r_0}{4\varepsilon(1-M_\infty)^2} (e^{\varepsilon x} - 1) \right]^{-1}$$

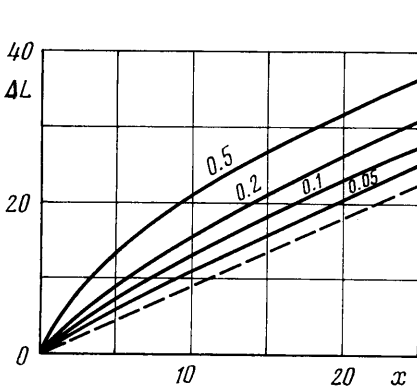
Следовательно, линейный профиль остается линейным и при $x > 0$, несмотря на более интенсивное затухание возмущений, связанное со звукопоглощающим действием покрытия ($\varepsilon > 0$). Затухание скачков в этом случае описывается формулой

$$(1.15) \quad \frac{\delta r}{\delta r_0} = \left[e^{\varepsilon x} + \frac{(1+\kappa)\delta r_0}{4\varepsilon(1-M_\infty)^2} (e^{\varepsilon x} - 1) \right]^{-1}$$

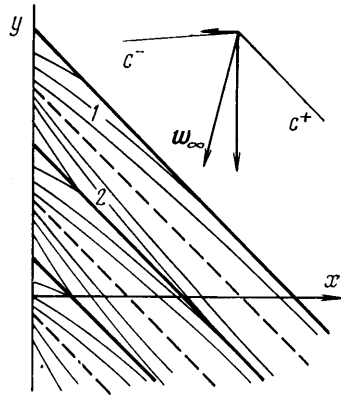
При $\varepsilon=0$ (1.14) и (1.15) сводятся к известным соотношениям, которые описывают нелинейное затухание возмущений рассматриваемого типа. Отметим, что, поскольку в данном приближении возмущения всех параметров пропорциональны Δr , то все приведенные выше формулы могут быть легко переписаны для Δr , δr , Δu и т. д.

Выше предполагалось, что возмущениями энтропии и левого инварианта Римана можно пренебречь. Полученные соотношения позволяют оценить соответствующие приращения, которые после выполнения необходимых вычислений оказываются такими, как указывалось ранее.

Для оценки относительного влияния на затухание возмущений эффектов нелинейности и звукопоглощающего действия покрытия были выполнены расчеты по формуле (1.15). Типичные результаты таких расчетов приведены на фиг. 2, которая отвечает следующим значениям безразмерных определяющих параметров задачи: $\kappa=1.4$, $M_\infty=0.2$ и $\varepsilon=\eta/R(1-M_\infty)=0.1$. На фигуре для различных δr_0 даны зависимости ΔL от x , где $\Delta L=-20 \lg(\delta r/\delta r_0)=-20 \lg(\delta p/\delta p_0)$ — величина, которая характеризует уменьшение интенсивности скачков, выраженное в децибелах. Напомним, что x



Фиг. 2

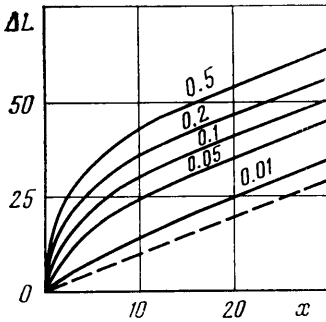


Фиг. 3

и «гидравлический» радиус R отнесены к произведению $a_\infty T$, которое пропорционально длине волны $\lambda=(1-M_\infty)Ta_\infty$, а величина δr_0 — к a_∞ . Результаты, полученные по формуле (1.15), учитывающей оба эффекта (нелинейности и влияния покрытия), нарисованы сплошными кривыми (цифры около кривых — значения δr_0). Кроме того, штрихами на фиг. 2 нанесена прямая $\Delta L=20\varepsilon x$, которая получается из (1.15) при $\delta r_0/\varepsilon \rightarrow 0$ и отвечает случаю, когда нелинейным затуханием можно пренебречь. Разность ординат любой сплошной и штриховой линий дает величину нелинейного затухания.

2. Рассмотрим теперь задачу о затухании нестационарных возмущений, которые содержат слабые скачки уплотнения, в слое газа, текущего между двумя параллельными плоскостями (боковыми стенками). На стенки нанесено звукопоглощающее покрытие, а сами стенки в декартовой системе координат $x'y'z'$, неподвижной относительно них, совпадают с плоскостями $z'=0$ и $z'=h$. Для анализа данного течения будем применять ту же модель, что и в предыдущей задаче, и процедуру осреднения по z' . В итоге получим, что уравнения для средних параметров отличаются от уравнений плоского нестационарного течения с вектором скорости, лежащим в плоскости $x'y'$, только наличием «источникового» члена в уравнении неразрывности. Ограничимся далее случаями, когда исследуемое течение таково, что в специально ориентированной прямоугольной системе координат xu , лежащей в плоскости $z'=0$ и движущейся с постоянной скоростью, оно стационарно и периодически по y . Как уже отмечалось, такая ситуация имеет место, в частности, в случае движущейся плоской решетки, если систему xu жестко связать с решеткой, а y направить параллельно ее фронту.

Пусть u и v — проекции вектора скорости w на оси x и y , причем $u < 0$, т. е. газ течет справа налево, как и в предыдущей задаче, а модуль скорости $w = |w|$ превышает скорость звука a при $|u| < a$. Примем, что начальные распределения параметров (в сечении $x=0$) заданы как функции y способом, аналогичным рассмотренному в п. 1. Так как $|u| < a$, то эти возмущения будут распространяться вправо, затухая при $x \rightarrow \infty$. Для $v < 0$ скачки уплотнения при $x \rightarrow \infty$ вырождаются в характеристики первого семейства. Для монотонных (на периоде Y) распределений в начальном сечении угол наклона слабых скачков к оси x при всех $x > 0$ постоянен и равен $(\theta - \alpha)_\infty$, где $\theta = \arctg(v/u)$ — угол наклона вектора скорости к оси x и $\alpha = \arcsin(a/w)$ — угол Маха, определенный по модулю скорости. Здесь и далее все индексы имеют тот же смысл, что и в п. 1.



Фиг. 4

В плоскости xu картина течения в данном случае такова, как показано на фиг. 3. Эта фигура отличается от фиг. 1 тем, что соответствующие линии (скачки и характеристики первого семейства) идут сверху вниз, а не наоборот. Кроме того, в правом верхнем углу фигуры показан вектор скорости невозмущенного потока w_∞ , а также направления c^+ - и c^- -характеристик относительно w_∞ . Все параметры считаются безразмерными. При приведении к безразмерному виду за характерную длину возьмем период решетки Y , а величины с размерностями скорости, плотности и давления будем относить к a_∞ , ρ_∞ и $\rho_\infty a_\infty^2$ соответственно, где a_∞ и ρ_∞ — скорость звука и плотность в невозмущенном потоке.

Решение данной задачи аналогично выполненному выше. При этом в дополнение к условиям $s=s_\infty$ и $l=l_\infty$, которые здесь справедливы с той же точностью, что и ранее, во всем потоке постоянна полная энтальпия, т. е.

$$(2.1) \quad 2i + w^2 = 2i_\infty + w_\infty^2$$

где i — удельная энтальпия (известная функция p и s).

Инварианты r и l в стационарной задаче вводятся равенствами

$$r = \theta - \int_1^w \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{w} dw, \quad l = \theta + \int_1^w \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{w} dw$$

причем интеграл по w берется при условиях (2.1) и $s=s_\infty$. В силу этих условий $\operatorname{ctg} \alpha$ — известная функция только w .

Не приводя дальнейших деталей, выпишем соотношения, которые описывают для совершенного газа затухание возмущений с ростом x . Формула (1.7) сохраняется и в рассматриваемой задаче, если под ε понимать комбинацию $\varepsilon = \eta \operatorname{tg} \alpha_\infty / h \cos(\theta + \alpha)_\infty$, а x и h считать отнесенными к периоду решетки Y . Заметим, кстати, что величина проводимости обычно зависит от скорости движения невозмущенного потока относительно покрытия. Поэтому для одного и того же звукопоглощающего покрытия значения η в этой и в предыдущей задачах будут, вообще говоря, разными.

Уравнение произвольной c^+ -характеристики можно записать в форме, аналогичной (1.10)

$$(2.2) \quad y = y(x) = y^\circ(\Delta r_0) + Ax - B\Delta r_0$$

$$A = A(\kappa, \alpha_\infty, \theta_\infty, \Delta r_0) = \operatorname{tg}(\theta + \alpha)_\infty + \frac{(1 + \kappa)\Delta r_0}{4 \cos^2 \alpha_\infty \cos^2(\theta + \alpha)_\infty}$$

$$B = B(\kappa, \alpha_\infty, \theta_\infty, \varepsilon, x) = \frac{1 + \kappa}{4 \cos^2 \alpha_\infty \cos^2(\theta + \alpha)_\infty} \left(r - \frac{1 - e^{-\varepsilon x}}{\varepsilon} \right)$$

где все функции имеют тот же смысл и обладают теми же свойствами, что и в (1.10). Введем далее ζ , $\zeta^\circ(\Delta r_0)$ и ζ' аналогично τ , $\tau^\circ(\Delta r_0)$ и τ' в первой задаче. Тогда в согласии с (2.2) соотношения (1.11)–(1.13) оказываются справедливыми и в данном случае, если заменить в них τ , $\tau^\circ(\Delta r_0)$, τ' и $(1 - M_\infty)^2$ на ζ , $\zeta^\circ(\Delta r_0)$, ζ' и на произведение $(-1) \cos^2 \alpha_\infty \cos^2(\theta + \alpha)_\infty$. Если при $x=0$ профиль $\Delta r_0 = \Delta r_0(\zeta)$ линейный, то в рассматриваемой задаче это означает, что $\Delta r_0(\zeta) = \zeta \delta r_0$. В итоге вместо (1.15) придем к формуле

$$\frac{\delta r}{\delta r_0} = \left[e^{\varepsilon x} + \frac{(1 + \kappa)\delta r_0(e^{\varepsilon x} - 1)}{4\varepsilon \cos^2 \alpha_\infty \cos^2(\theta + \alpha)_\infty} \right]^{-1}$$

Отметим, кстати, что $\delta r = (2 \cos \alpha_\infty / w_\infty) \delta p = \sin 2\alpha_\infty \delta p$.

Некоторые результаты расчетов, выполненных по этой формуле для $\kappa=1.4$, $M_\infty=1.5$, $\theta=117^\circ$ и $\varepsilon=0.1$, приведены на фиг. 4, аналогичной фиг. 2.

Заметим, наконец, что все формулы, полученные выше, сохраняются и в том случае, если газ течет слева направо, а возмущения распространяются в противоположном направлении. При этом x всюду следует заменить на расстояние от начального сечения, а угол θ отсчитывать от направления распространения возмущений.

В заключение авторы выражают признательность А. С. Мясникову и Р. А. Шипову, привлечших их внимание к рассмотренным задачам, а А. Н. Руденко — за полезные консультации.

Поступила 16 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4, стр. 286–292.
2. Rudnick I. On the attenuation of a repeated sawtooth shock wave. J. Acoust. Soc. America, 1953, vol. 25, No. 5, pp. 1012–1013.
3. Fink M. R. Shock wave behavior in transonic compressor noise generation. ASME Publ., 1974, No. 74-GT-7, pp. 1–7.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. Nayfeh A. H., Kaiser J. E., Telionis D. P. Acoustics of aircraft engine — duct systems. AIAA Journal, 1975, vol. 13, No. 2, pp. 130–153.
6. Pestorius F. M., Williams S. B. Upper limit on the use of weak-shock theory. J. Acoust. Sol. America, 1975, vol. 55, No. 6, pp. 1334–1335.
7. Nayfeh A. H., Tsai M.-S. Non-linear wave propagation in acoustically lined circular ducts. J. Sound and Vibration, 1974, vol. 36, No. 1, pp. 77–89.
8. Богод А. Б., Замгфорт Б. С., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Об использовании процесса установления по времени при решении задач стационарного обтекания газом решеток профилей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4, стр. 118–124.
9. Nayfeh A. H. Effect of the acoustic boundary layer on the wave propagation in ducts. J. Acoust. Soc. America, 1973, vol. 54, No. 6, pp. 1737–1742.