

**РЕГУЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН
ПРИ НАЛИЧИИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ**

В. Т. КИРЕЕВ, Н. А. ТИХОМИРОВ

(Москва)

На примере неравновесного возбуждения молекулярных колебаний в азоте изучается влияние неравновесных физико-химических процессов на течение, возникающее при регулярном столкновении и отражении ударных волн. Показано, что тепловой эффект колебательной релаксации мал и задачу можно линеаризировать около известного решения [1]. Подобный подход к решению задач обтекания клина и некоторых одномерных нестационарных задач использовался ранее в [2-4]. Решение указанных задач строилось в угловой области, ограниченной ударной волной и твердой стенкой (или контактной поверхностью), и сводилось к известному функциональному уравнению [6].

Решение данной задачи из-за наличия двух угловых областей, разделенных тангенциальным разрывом, сводится к функциональному уравнению более общего вида, чем в [6]. Результаты получены в конечном виде. В частном случае скачков равной интенсивности получаются параметры регулярного отражения.

1. Пусть две ударные волны Oa и Ob , имеющие интенсивности P_1/P_0 и P_2/P_0 , пересекаются под углом φ (фиг. 1). Течение, возмущенное колебательной релаксацией, стационарно в системе координат, связанной с точкой O , и в каждой из областей описывается системой уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, & \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= 0, & \frac{dE}{dt} &= \frac{E_p - E}{\tau(p, \rho)}, & h &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + E \\ E_p &= R\theta_v (e^{\theta_v/T} - 1)^{-1} \end{aligned}$$

Здесь u, v, p, ρ — компоненты скоростей, давление и плотность, h — энтальпия, E — колебательная энергия, E_p — равновесная колебательная энергия, θ_v — характеристическая температура, $\gamma = 7/5$, τ — время релаксации.

Можно показать, что во всем диапазоне температур, где происходит возбуждение колебаний, параметр $E_p/h_0 \ll 1$ (h_0 — замороженная энтальпия) и задачу можно линеаризировать около соответствующего замороженного состояния в каждой из областей. Будем искать решение системы (1.1) в виде

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u &= u_{i0}(1+u_i), & v &= u_{i0}v_i, & p &= p_{i0}(1+p_i), & \rho &= \rho_{i0}(1+\rho_i) \\ E_{i0}' &= \frac{E_{i0}}{h_{i0}}, & x_i' &= \frac{x}{u_{i0}\tau_{i0}}, & y_i' &= \frac{y}{u_{i0}\tau_{i0}} \end{aligned}$$

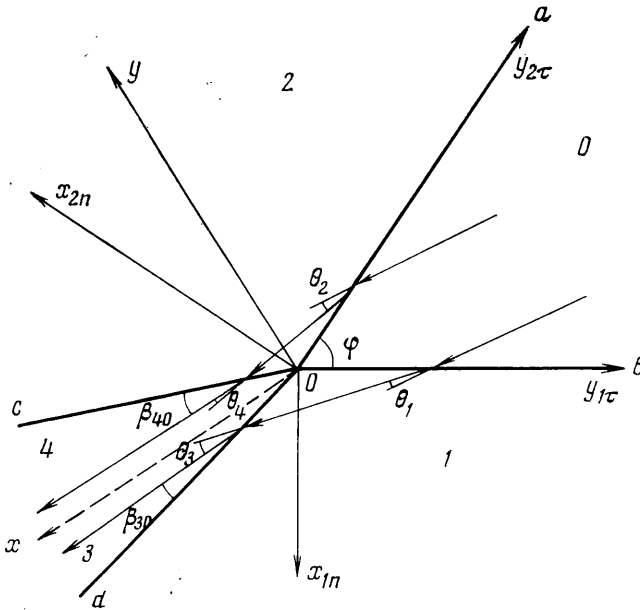
Индексом i помечены параметры течения в соответствующих областях, индексом 0 обозначены параметры замороженного течения, x_i направлены вдоль невозмущенных линий тока (i — индекс области фиг. 1).

Подставляя (1.2) в (1.1) и пренебрегая квадратами малых величин, получим линейную систему уравнений

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\gamma M_{i0}^2} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} &= 0, & \frac{\partial v_i}{\partial y_i} + \frac{1}{\gamma M_{i0}^2} \frac{\partial p_i}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_i} &= 0, & \frac{\partial p_i}{\partial x_i} - \gamma \frac{\partial \rho_i}{\partial x_i} &= -\gamma \frac{\partial E_{i0}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E_{i0}}{\partial x_i} &= E_{pi0} - E_{i0} \end{aligned}$$

Здесь M_{i0} — замороженные числа Маха.

Для определения параметров течения в областях 1, 2 оказывается удобным перейти к системе координат $x_{jn}, y_{j\tau}$, направленной по нормали



Фиг. 1

и касательной к скачку в каждой из областей ($j=1, 2$). Для этого, полагая в (1.3) $v_i=y_i=0$ и интегрируя ее при нулевых граничных условиях на фронте ($x_{jn}=0$), получим

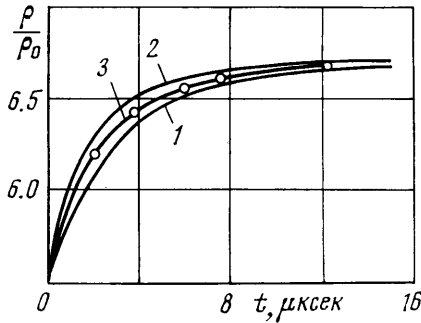
$$(1.4) \quad \begin{aligned} p_j &= \frac{\gamma M_{nj0}^2}{1 - M_{nj0}^2} E_{j0}, & \rho_j &= \frac{p_j}{\gamma M_{nj0}^2} & u_j &= -\rho_j \\ E_{j0} &= E_{pj0} (1 - e^{-x_{jn}}) & (j=1, 2) \end{aligned}$$

где M_{nj0} — числа Маха за скачками Oa и Ob по нормали к ним.

Полученные формулы определяют добавки, обусловленные релаксацией за прямым скачком уплотнения заданной интенсивности.

На фиг. 2 приведено сопоставление профилей плотности в релаксационной зоне за ударной волной, распространяющейся в азоте ($M_{00}=7.85$), полученных численным расчетом и экспериментально [5] (кривые 2, 3), с результатами аналитического решения (1.4) (кривая 1). Хорошее со-

впадение указанных профилей указывает на правомерность линеаризованной постановки; при этом формулы (1.4) могут быть использованы для определения времени релаксации по измеренному экспериментально распределению плотности. Все дальнейшее рассмотрение будем вести в системе координат x, y (фиг. 1). Переходя в (1.4) от системы координат x_{jn}, y_{jn} к системе x, y по известным формулам



Фиг. 2

$$x_{jn} = x \sin \varphi_j + (-1)^j y \cos \varphi_j$$

$$y_{jn} = -x \cos \varphi_j + (-1)^j y \sin \varphi_j$$

получим решение в областях 1 и 2

$$p_j = \frac{\gamma M_{nj0}^2}{1 - M_{nj0}^2} E_{pj0}, \quad \rho_j = \frac{p_j}{\gamma M_{nj0}^2}$$

$$u_j = \frac{\sin(\varphi_j - \theta_j) \sin \varphi_j}{\cos \theta_j} \rho_j$$

$$v_j = \frac{\sin(\varphi_j - \theta_j) \cos \varphi_j}{\sin \theta_j} \rho_j$$

$$E_{pj0} = E_{pj0} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(x + (-1)^j y \operatorname{ctg} \varphi_j) \sin \varphi_j}{\sin(\varphi_j - \theta_j)} \right] \right\}$$

Полагая в (1.5) $y = (-1)^i x \operatorname{tg} \beta_{i0}$ ($i=3, 4$), найдем добавки на преломленных скачках Os и Od .

2. Переходим теперь к отысканию решения в областях 3, 4 ($i=3, 4$). Интегрируя последнее уравнение (1.3) и определяя произвольные функции из условия непрерывности колебательных энергий на преломленных скачках, получим

$$(2.1) \quad E_{i0} = E_{pi0} [1 - (1 - v_{i0}) \exp((-1)^i y \operatorname{ctg} \beta_{i0} - x) - v_{i0} \exp((-1)^i \varepsilon_{i0} y \operatorname{ctg} \beta_{i0} - x)]$$

$$v_{i0} = \frac{h_{j0} E_{pj0}}{h_{i0} E_{pi0}}, \quad \varepsilon_{i0} = 1 - \frac{u_{i0} \tau_{i0}}{u_{j0} \tau_{j0}} \frac{\sin(\varphi_j + \beta_{i0})}{\cos \beta_{i0} \sin(\varphi_j - \theta_j)} \quad (j=1, 2; i=3, 4)$$

С учетом (2.1) общее решение (1.3) можно записать в виде

$$(2.2) \quad v_i = a_i e^{z_1} + b_i e^{z_2} + f_i [x + (-1)^i s_{i0} y] - g_i [x - (-1)^i s_{i0} y]$$

$$p_i = \frac{\gamma M_{i0}^2}{\operatorname{ctg} \beta_{i0}} \left(a_i e^{z_1} + \frac{b_i}{\varepsilon_{i0}} e^{z_2} \right) - \frac{\gamma M_{i0}^2}{S_{i0}} (f_i + g_i)$$

$$\rho_i = \frac{1}{\gamma} p_i + E_{i0} + h_i(y), \quad u_i = \varphi_i(y) - \frac{p_i}{\gamma M_{i0}^2}$$

$$a_i = - \frac{E_{pi0} (1 - v_{i0}) \operatorname{ctg} \beta_{i0}}{\operatorname{ctg}^2 \beta_{i0} - s_{i0}^2}, \quad b_i = - \frac{E_{pi0} \varepsilon_{i0} \omega v_{i0} \operatorname{ctg} \beta_{i0}}{\varepsilon_{i0}^2 \operatorname{ctg}^2 \beta_{i0} - s_{i0}^2}$$

$$s_{i0}^2 = M_{i0}^2 - 1, \quad z_1 = (-1)^i y \operatorname{ctg} \beta_{i0} - x, \quad z_2 = (-1)^i \varepsilon_{i0} y \operatorname{ctg} \beta_{i0} - x$$

$$(i=3, 4)$$

Общее решение (2.2) содержит восемь произвольных функций f_i, g_i, h_i, φ_i , кроме того, в системе соотношений на ударных волнах имеются две неизвестные функции $\delta_i(x)$, определяющие искривление фронтов Os и Od .

Для определения этих десяти произвольных функций имеем два граничных условия на тангенциальном разрыве (равенство давлений и параллельность потоков при $y=0$) и по четыре условия на скачках Oc и Od ; последние получаются из решения линеаризированной системы алгебраических соотношений на скачках

Таким образом, полная система граничных условий для определения произвольных функций в общем решении (2.2) будет иметь вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y &= (-1)^i x \operatorname{tg} \beta_{i0} \\ p_i &= a_{i0} v_i + \mu_{i1}(x), & p_i &= b_{i0} u_i + \mu_{i2}(x), & p_i &= c_{i0} \rho_i + \mu_{i3}(x) \\ p_3 &= p_4, & v_3 &= -v_4, & (y &= 0) \end{aligned}$$

Постоянные a_{i0} , b_{i0} , c_{i0} определяются параметрами замороженного течения и имеют одинаковый вид для всех слабовозмущенных течений и их можно взять из известного [6] решения задачи сверхзвукового обтекания слабовозмущенного клина. Функции $\mu_i(x)$ известны из решения в областях 1 и 2.

Удовлетворяя граничным условиям (2.3), приходим к системе четырех функциональных уравнений для определения f_3 , f_4 , g_3 , g_4

$$(2.4) \quad \begin{aligned} f_3(x) - g_3(x) + f_4(x) - g_4(x) &= \Psi_1(x) \\ f_3(x) + g_3(x) - \omega [f_4(x) + g_4(x)] &= \Psi_2(x) \\ f_i[x(1+s_{i0} \operatorname{tg} \beta_{i0})] - \lambda_i g_i[x(1-s_{i0} \operatorname{tg} \beta_{i0})] &= \Psi_i(x) \quad (i=3, 4) \\ \Psi_1(x) &= -(a_4 + b_4) e^{-x_1} - (a_3 + b_3) e^{-x} \end{aligned}$$

$$\Psi_2(x) = \frac{\omega s_{40}}{\operatorname{ctg} \beta_{40}} \left(a_4 + \frac{b_4}{\varepsilon_{40}} \right) e^{-x_1} + \frac{s_{30}}{\operatorname{ctg} \beta_{30}} \left(a_3 + \frac{b_3}{\varepsilon_{30}} \right) e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= -\frac{a_{i0} s_{i0}}{a_{i0} s_{i0} + \gamma M_{i0}^2} (a_i + b_i e^{-(1-\varepsilon_{i0})x}) + \\ &+ \frac{\gamma M_{i0}^2 s_{i0} (a_i + (b_i/\varepsilon_{i0}) e^{-(1-\varepsilon_{i0})x})}{\operatorname{ctg} \beta_{i0} (a_{i0} s_{i0} + \gamma M_{i0}^2)} - \frac{s_{i0}}{a_{i0} s_{i0} + \gamma M_{i0}^2} \mu_{i1}(x) \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{s_{30} M_{40}^2}{s_{40} M_{30}^2}, \quad \lambda_i = \frac{a_{i0} s_{i0} - \gamma M_{i0}^2}{a_{i0} s_{i0} + \gamma M_{i0}^2}$$

$$x_1 = \frac{M_{30}}{M_{40}} \frac{\tau_{340} x}{\sqrt{r_0}}, \quad r_0 = \frac{\rho_{30}}{\rho_{40}}, \quad \tau_{340} = \frac{\tau_{30}}{\tau_{40}}$$

Последовательным исключением из (2.4) f_3 , g_3 , f_4 получаем функциональное уравнение для определения вида функции $g_4(z)$

$$(2.5) \quad g_4(z) - \sum_{l=1}^3 \delta_l g_4(k_l z) = G(z)$$

$$\delta_l = (-1)^l \frac{1-\omega}{1+\omega} \lambda_l, \quad k_{il} = \frac{1-s_{i0} \operatorname{tg} \beta_{i0}}{1+s_{i0} \operatorname{tg} \beta_{i0}} \quad (l=1, 2)$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2, \quad k_3 = k_1 k_2$$

$$G(z) = \frac{\lambda_1 [\Psi_2(k_1 z) - \Psi_1(k_1 z)] - [\Psi_2(z) + \Psi_1(z)]}{1+\omega} +$$

$$+ \frac{2}{1+\omega} \Psi_3 \left(\frac{z}{1+s_{30} \operatorname{tg} \beta_{30}} \right) - \frac{1-\omega}{1+\omega} \Psi_4 \left(\frac{z}{1+s_{40} \operatorname{tg} \beta_{40}} \right) - \lambda_1 \Psi_4 \left(\frac{k_1 z}{1+s_{40} \operatorname{tg} \beta_{40}} \right)$$

Решение уравнения (2.5) проще всего получить методом последовательных приближений. Взяв в качестве нулевого приближения

$$g_{40}(z) = G(z)$$

найдем первое приближение

$$g_{41}(z) = G(z) + \sum_{l=1}^3 \delta_l G(k_l z)$$

Продолжая далее итерационный процесс, получим

$$(2.6) \quad g_i(z) = G(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \delta_3^k \delta_2^j \delta_1^{n-k-j} G(k_3^k k_2^j k_1^{n-k-j} z)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что ряд (2.6) в точности удовлетворяет функциональному уравнению (2.5).

Сходимость и единственность решения (2.6) легко доказать, следуя [6], где рассматривается упрощенное уравнение (последнее получается, если в (2.5) положить $\delta_1 = \delta_2 = 0$).

После определения вида функции $g_i(z)$ из (2.4) можно найти все остальные функции и, используя (2.2), получить добавки p_i и v_i в областях 3, 4.

Выпишем решение на тангенциальном разрыве

$$(2.7) \quad v_3 = -v_4 = (a_4 + b_4) e^{-x_1} + \Psi_4 \left(\frac{x}{1 + s_{40} \operatorname{tg} \beta_{40}} \right) - g_4(x) + \lambda_2 g_4(k_2 x)$$

$$p_3 = p_4 = \frac{\gamma M_{40}^2}{\operatorname{ctg} \beta_{40}} \left(a_4 + \frac{b_4}{\varepsilon_{40}} \right) e^{-x_1} - \frac{\gamma M_{40}^2}{s_{40}} [g_4(x) + \lambda_2 g_4(k_2 x)] +$$

$$+ \Psi_4 \left(\frac{x}{1 + s_{40} \operatorname{tg} \beta_{41}} \right) \quad (i=4)$$

Используя второе и третье граничные условия (2.3), найдем функции φ_i и h_i , определяющие приращения u_i и ρ_i

$$(2.8) \quad \varphi_i(y) = \frac{b_{40} + \gamma M_{40}^2}{\gamma M_{40}^2 b_{40}} p_4 (y \operatorname{ctg} \beta_{40}) - \frac{1}{b_{40}} \mu_{42} (y \operatorname{ctg} \beta_{40})$$

$$h_i(y) = \frac{c_{40} - 1}{c_{40}} p_4 (y \operatorname{ctg} \beta_{40}) + \gamma E_{40} + \frac{1}{c_{40}} \mu_{43} (y \operatorname{ctg} \beta_{40})$$

Легко показать, что при $y=0$ $\varphi_i(y)=0$; при $y \rightarrow \infty$ $\varphi_i(y)$ стремится к постоянному пределу, который определяется выражением ($i=4$)

$$\varphi_4(\infty) = - \frac{b_{40} + \gamma M_{40}^2}{b_{40} s_{40}} \left[\frac{E_{p40} s_{40} (1 - v_{40})}{\operatorname{ctg}^2 \beta_{40} - s_{40}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 + \lambda_2) G(\infty)}{1 - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)} + \Psi_4(\infty) \right] - \frac{\mu_{42}(\infty)}{b_{40}}$$

$$G(\infty) = \left(\frac{1 - \omega}{1 + \omega} + \gamma_1 \right) \Psi_4(\infty) + \frac{2}{1 + \omega} \Psi_3(\infty)$$

На тангенциальном разрыве ($y=0$)

$$u_4 = - \frac{1}{\gamma M_{40}^2} p_4, \quad \rho_4 = \frac{1}{v} p_4 + E_{40}(x)$$

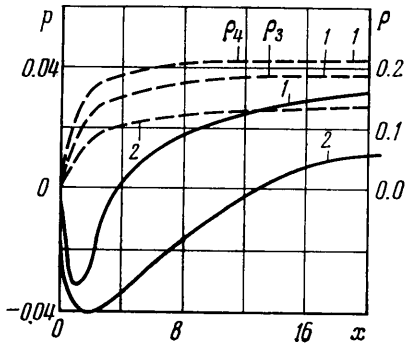
Можно показать, что приращение давления $p_4(x, y)$ при $x \rightarrow \infty p_4(x, y)$ стремится к постоянному пределу независимо от y и определяется равновесным значением колебательной энергии. Приращения плотности ρ_4 и скорости u_4 при $x \rightarrow \infty$ зависят от y ($h(y) \neq 0$). Это указывает на образование вблизи тангенциального разрыва релаксационного слоя аналогично [2], где такой слой исследовался на клине.

3. Рассмотрим частный случай пересечения скачков равной интенсивности ($\omega=1$). В этом случае задача эквивалентна регулярному отражению от жесткой стенки. Формулы (2.7) при этом упрощаются и приводятся к виду

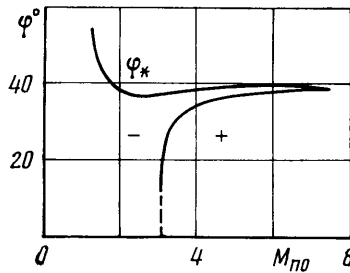
$$(3.1) \quad p_4 = -\frac{\gamma M_{40}^2}{\text{ctg } \beta_{40}} \left(a_4 + \frac{b_4}{\varepsilon_{40}} \right) e^{-x} + \frac{\gamma M_{40}^2}{s_{40}} \Psi_1(x) - \frac{2\gamma M_{40}^2}{s_{40}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G(h^n x)$$

$$v_4=0, \quad \rho_4 = \frac{1}{\gamma} p_4 + E_{40}(x), \quad u_4 = -\frac{1}{\gamma M_{40}^2 p_4}$$

Если положить в (3.1) $\tau_{10}=\infty$, т. е. учитывать релаксацию только за отраженной волной, то в этом случае задача эквивалентна сверхзвуковому обтеканию клина и



Фиг. 3



Фиг. 4

формулы (3.1) переходят в известное решение [2]. Для равновесного значения давления получаем из (3.1)

$$(3.2) \quad p_4 = \frac{\gamma M_{40}^2 a_4}{\text{ctg } \beta_{40}} \left(1 - \frac{a_{40} \text{ctg } \beta_{40}}{\gamma M_{40}^2} \right) + \mu_{41}(\infty)$$

Равновесные значения плотности и температуры при этом достигаются только на стенке ($y=0$).

На фиг. 3 представлены некоторые результаты расчетов приращений давления (сплошные кривые) и плотности (пунктирные кривые) в случае регулярного пересечения ударных волн (кривые 1) с интенсивностями $P_1/P_0=18.5$ и $P_2/P_0=41.83$ под углом $\varphi=30^\circ$ и регулярного отражения ударной волны $P_1=P_0=18.5$ (кривые 2). Зависимость времени релаксации от температуры, приведенная к атмосферному давлению, была взята из работы [5].

Давление в релаксационной зоне меняется немонотонно, имеется ярко выраженный минимум давления. Плотность монотонно растет до равновесного значения. В данном расчете равновесное значение давления регулярного отражения оказалось больше замороженного. Однако существует область определяющих параметров задачи (M_{n0}, φ) (M_{n0} — нормальное число Маха падающего скачка), где равновесное значение $p_4 < 0$. На фиг. 4 в плоскости (M_{n0}, φ) представлена граничная кривая $p_4=0$. Если $M_{n0} < 3.05$, что соответствует интенсивности падающей волны $P_1/P_0 < 10.62$, равновесное значение давления меньше замороженного при любых углах $\varphi < \varphi_*$ (φ_* — замороженный критический угол, выше которого регулярное отражение невозможно). При любых значениях M_{n0} равновесное значение давления больше замороженного; исключение составляет узкая область, лежащая вблизи критических углов, ширина которой уменьшается по мере роста интенсивности падающей волны.

Поступила 15 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Минасянц С. М. Регулярное встречное взаимодействие плоских ударных волн. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, 2, № 2.
2. Жигулев В. Н. Об эффекте релаксационного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6.
3. Гилинский С. М. Линеаризованное сверхзвуковое течение горючей смеси газов около клина. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 11.
4. Зак Л. И., Левин В. А. Одномерные нестационарные течения горючей смеси газов при малом тепловом эффекте химических реакций. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 11.
5. Березкина М. К., Сыщикова М. П., Красовская И. В. Экспериментальное исследование колебательной релаксации и диссоциации молекул азота. Научн.-исслед. отчет ФТИ АН СССР, 1972.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.