МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1976

УДК 533.6.011.55+536.3

О ФОРМЕ ТЕЛА С МИНИМАЛЬНЫМ ПОЛНЫМ ПОТОКОМ ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ К ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

А. А. ДЕЕВ, В. А. ЛЕВИН, Н. Н. ПИЛЮГИН

(Москва)

При входе космического аппарата в атмосферу планеты с гиперзвуковой скоростью одной из существенных проблем является аэродинамический нагрев его поверхности за счет конвективного и радиационного тепловых потоков от газа, прошедшего через сильную ударную волну. Ввиду сильного разрушающего действия этого разогрева важной задачей является выбор аэродинамической формы летательного аппарата, обеспечивающей минимальный приток тепла к его поверхности. В работах [1–7] рассматривалась при разных предположениях задача определения формы осесимметричного тела из условия наименьшего суммарного по боковой поверхности тела конвективного теплового потока.

В ряде случаев имеются такие режимы входа (например, в атмосферу Земли со скоростью 11 *км/сек* на высоте ~60 *км* [12]), при которых радиационная составляющая становится преобладающей в суммарном тепловом потоке к телу.

Численное решение задачи об обтекании тела гиперзвуковым потоком невязкого нетеплопроводного излучающего газа получено в настоящее время лишь для ограниченного класса тел и в основном для некоторых режимов входа (например, [8–12]). На основании этих расчетов нельзя сделать общие выводы для произвольной формы тел. Поэтому были предложены приближенные методы, позволяющие получить распределение лучистого теплового потока для произвольного осесимметричного тела в широком диапазоне режимов полета [13–15].

В настоящей работе получено выражение для полного по всей поверхности тела радиационного потока тепла, найдены критерии подобия. Поставлена вариационная задача об определении формы осесимметричного тела из условия наименьшего суммарного по всей поверхности тела лучистого теплового потока, которая решена аналитически для класса тонких тел и в случае сильно излучающего газа.

1. Рассмотрим обтекание осесимметричного тела гиперзвуковым потоком невязкого излучающего газа. Используем приближение объемного высвечивания и метод пограничного слоя [16] при решении газодинамических уравнений в сжатом ударном слое и аппроксимацию энтальпии газа h и коэффициента Планка K_p в виде

$$h=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho},\quad K_p=ApT^n$$

где γ — эффективное отношение теплоемкостей газа в ударном слое, A, n — константы аппроксимации, p, ρ, T — соответственно давление, плотность и температура газа в ударном слое. Тогда решение газодинамических уравнений в ударном слое [13, 14] с учетом охлаждения газа излучением позволяет получить распределение лучистого потока $q(t)$ на поверхности произвольного осесимметричного тела, заданного уравнением $x=x(t)$, $y=y(t)$

$$q(t)=\frac{b\Pi_\infty}{2(n+4)y(t)}\int_0^t\frac{\operatorname{tg}\alpha(z)y(z)dz}{[b(t-z)\cos^{-1}\alpha(z)+\sin^{-i}\alpha(z)]^j} \tag{1.1}$$

$$b=\varepsilon(n+4)\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{4K_{ps}\sigma T_s^4}{\Pi_\infty},\quad \varepsilon=\frac{\rho_\infty}{\rho_s},\quad i=2(n+4),\quad j=\frac{n+5}{n+4}$$

Здесь $\Pi_\infty=\rho_\infty v_\infty^3/2$ — поток кинетической энергии набегающего газа; x, y — координаты соответственно вдоль потока и перпендикулярно ему; t — координата вдоль контура тела, отсчитываемая от начала координат; α — угол между касательной к контуру тела и направлением невозмущенного потока; σ — постоянная Стефана — Больцмана; индекс s соответствует максимальным величинам p, ρ, T непосредственно за скачком уплотнения; индекс ∞ отмечает значения параметров набегающего потока газа.

В работах [13–15] проводилось сравнение полученного распределения (1.1) на разных телах с точными численными расчетами [8, 11, 12, 15]. Несмотря на предположение об объемном высвечивании, используемое при выводе формулы (1.1), было получено хорошее совпадение по распределению лучистого потока, что объясняется следующими обстоятельствами. Для рассматриваемого диапазона температур ($T\leqslant 18\,000$, °K) и давлений ($p\sim 1$ *атм*) спектральный коэффициент поглощения k_ν химически равновесного воздуха уменьшается с уменьшением T и p. Температура и давление газа падают при его движении вдоль касательной координаты t от критической точки затупленного тела. Вместе с тем сильно уменьшается коэффициент поглощения газа. Таким образом, приближение объемного высвечивания становится более точным при удалении от критической линии по координате t. (Отход ударной волны увеличивается с ростом t сравнительно мало [12].)

Формула (1.1) справедлива при обтекании тел как с присоединенной, так и с отошедшей ударной волной. Расчет лучистого потока к поверхности острого кругового конуса по этой формуле совпадает с численными и аналитическими результатами, полученными в [15].

Интегрируя (1.1) по боковой поверхности тела, переходя к переменным (x, y) и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим для суммарного лучистого потока

$$Q_R=\Pi_\infty Q,\quad Q=\pi\int_0^l G(x,y,\dot y)dx \tag{1.2}$$

$$G(x,y,\dot y)=y\dot y^3\frac{1-W}{1+\dot y^2} \tag{1.3}$$

$$W=\left[b(L-t(x))\sqrt{1+\dot y^2}\left(\frac{\dot y^2}{1+\dot y^2}\right)^{i/2}+1\right]^{-2/i}$$

$$t(x)=\int_0^x\sqrt{1+\dot y^2}\,dx,\quad L=t(l),\quad \dot y=\frac{dy}{dx}$$

где l — длина тела.

В случае обтекания тонких тел (при $\dot{y} \ll 1$) из (1.2), (1.3) получим

$$Q = bk\pi \int_0^l (l-x) y \dot{y}^m \, dx, \quad G = bk\pi (l-x) y \dot{y}^m \tag{1.4}$$

$$m = 2(n+4)+3, \quad k = (n+4)^{-1}$$

Введем безразмерные координаты ξ, η и относительную толщину тела τ

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/R, \quad \tau = 2R/l \tag{1.5}$$

где R — радиус миделя тела.

Подставляя (1.5) в (1.4), имеем

$$Q = \pi bkR^3 (\tau/2)^{m-2} I \tag{1.6}$$

$$I = \int_0^1 (1-\xi) \eta \dot{\eta}^m \, d\xi, \quad \dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\xi} \tag{1.7}$$

Формула (1.6) позволяет установить некоторые законы подобия для тонких тел.

Изменим размеры тела вдоль обеих осей следующим образом:

$$R_1 = \beta R, \quad l_1 = \delta l, \quad \tau = \beta \tau / \delta \tag{1.8}$$

Из (1.4), (1.6) для нового тела получим

$$Q_1 = \beta^3 (\beta/\delta)^{m-2} Q \tag{1.9}$$

Отсюда следуют законы пересчета теплового потока для геометрически-подобных и аффинно-подобных тел.

Если определить коэффициент лучистого теплообмена в виде

$$C_Q = Q/(\pi R^2) \tag{1.10}$$

то из (1.6) следует, что для тонких тел вращения отношение $C_Q/(bR)$ пропорционально относительной толщине τ в степени $m-2$

$$C_Q/(bR) = k(\tau/2)^{m-2} I \tag{1.11}$$

Заметим, что коэффициент пропорциональности и показатель степени зависят от режима входа в атмосферу планеты.

В случае сильно излучающего газа, когда параметр излучения $B = bL \gg 1$ и $\dot{y} \sim 1$, из (1.2) следует:

$$Q = \pi \int_0^l \frac{y \dot{y}^3}{1+\dot{y}^2} \, dx \tag{1.12}$$

что соответствует распределению

$$q(t) = {}^1/_2 \Pi_\infty \sin^3 \alpha(t) \tag{1.13}$$

Заметим, что этот результат можно получить непосредственно, не обращаясь к формуле (1.2), чтобы избежать тем самым ограничений, накладываемых на гладкость формы тела при выводе формулы (1.2).

Действительно, на скачке уплотнения непосредственно за ударной волной при $M_\infty \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$ в нулевом приближении по ε имеем $E_s = {}^1/_2 v_\infty{}^2 \sin^2 \alpha$, где E_s — кинетическая энергия газа непосредственно за скачком.

Поток энергии, идущий от скачка по нормали к телу, будет

$$q_n=\rho_\infty v_\infty E_s \sin\alpha \simeq \Pi_\infty \sin^3\alpha$$

При сильном излучении вся кинетическая энергия газа, входящая в ударный слой, высвечивается. А поскольку при объемном высвечивании газа в приближении локально-одномерного плоского ударного слоя лучистый поток к телу равен половине полного потока в данной точке, то $q=q_n/2$, а следовательно, (1.13). Если предполагать заранее наличие у тела плоской носовой части радиуса y_0, то формула (1.12) примет вид

$$\frac{Q}{\pi}=\int_0^l \frac{y\dot{y}^3}{1+\dot{y}^2}dx+\frac{y_0^2}{2} \tag{1.14}$$

В безразмерных переменных (1.5) для коэффициента теплообмена (1.10) будем иметь

$$C_Q=I(\tau),\quad I(\tau)=\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\int_0^1 \frac{\eta\dot{\eta}^3\,d\xi}{1+\tau^2\dot{\eta}^2/4}+\frac{\eta_0^2}{2},\quad \eta_0=\frac{y_0}{R} \tag{1.15}$$

Из формулы (1.15) следует, что в случае сильно излучающего газа коэффициент лучистого теплообмена зависит только от относительной толщины τ. Отсюда же с учетом (1.10) имеем закон подобия: для геометрически-подобных тел с коэффициентом подобия β отношение полных лучистых потоков в случае сильно излучающего газа равно β^2.

2. Остановимся теперь на постановке задачи определения оптимальной по лучистому теплообмену формы осесимметричного тела. Выражение (1.2) для суммарного лучистого теплового потока к поверхности тела позволяет свести эту проблему к следующей вариационной задаче: найти функцию $y=y(x)$, для которой функционал Q (1.2) принимает наименьшее значение и которая удовлетворяет заданным граничным условиям, либо изопериметрическим условиям в виде заданного объема или заданной смачиваемой поверхности

$$V=\pi\int_0^l y^2\,dx,\qquad S=2\pi\int_0^l y\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx \tag{2.1}$$

Известно, что экстремаль поставленной вариационной задачи удовлетворяет уравнению Эйлера [17]

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{2.2}$$

где $F=G$ при заданных R, l; $F=G+\lambda y^2$ при заданных V, R или V, l; $F=G+\lambda y\sqrt{1+\dot{y}^2}$ при заданных S, R или S, l; λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Общее решение уравнения (2.2) содержит две неизвестные константы, а если задан объем V или поверхность S, то еще и множитель Лагранжа λ. В первом случае константы определяются из граничных условий

$$y(0)=0,\ y(l)=R \tag{2.3}$$

Во втором — из первого граничного условия (2.3) и условия трансверсальности [17]

$$\left[\left(F-\dot{y}\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\right)\delta x+\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\pm\delta y\right]_{x=l}^{x=0}=0 \tag{2.4}$$

Множитель Лагранжа λ определяется из заданного изопериметрического условия.

Рассмотрим решение задачи при обтекании тонких тел при $\dot{y}\ll 1$. В этом случае функционал (1.2) имеет вид (1.4).

Если заданы R и l, то задача сводится к решению уравнения (2.2) для функции $F=G$ из (1.4) с учетом граничных условий (2.3).

Решение имеет следующий вид:

$$\eta=[1-(1-\xi)^{\varphi}]^{\psi}\quad \varphi=\frac{m-2}{m-1},\quad \psi=\frac{m}{m+1} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (1.7), получим

$$I=(\varphi\psi)^{m}/\varphi \tag{2.6}$$

Для сравнения рассмотрим решение задачи в классе степенных функций $\eta=\xi^{r}$. Показатель r находится из условия минимума функционала (1.4). Имеем

$$r=(w+m-1)/(m+1),\qquad w=0.5(1+\sqrt{1+4\varphi})/\varphi \tag{2.7}$$

Ниже приведено отношение d_1 коэффициента теплообмена острого конуса к коэффициенту теплообмена оптимального контура при одинаковых условиях для ряда значений параметра n, типичных при гиперзвуковом обтекании воздухом (первая строка), и аналогичное отношение d_2, соответствующее оптимальному степенному контуру (вторая строка). В третьей строке приведены значения r, рассчитанные по формуле (2.7).

n	0	4	8
m	11	19	27
d_1	1.245	1.236	1.231
d_2	1.011	1.020	1.024
r	0.975	0.984	0.988

В случае сильно излучающего газа ($bR\gg 1$, $\dot{y}\sim 1$) суммарный лучистый поток к телу определяется выражением (1.14). Функционал (1.14) совпадает с функционалом, определяющим волновое сопротивление тела в ньютоновской постановке. Подробный анализ соответствующей вариационной задачи для тела минимального волнового сопротивления при разных изопериметрических условиях приведен в [17].

Рассмотрим случай, когда заданы длина l и радиус миделя тела R. В этом случае [17] оптимальный контур $y=y(x)$ не проходит через начало координат ($y_0\neq 0$). Его параметрическое уравнение имеет в безразмерных переменных (1.5) следующий вид:

$$\xi=\frac{\tau}{8}\eta_0\left(p^{-2}+\frac{3}{4}p^{-4}+\ln p-\frac{7}{4}\right) \tag{2.8}$$
$$\eta={}^1/_4\eta_0(1+p^2)^2p^{-3},\quad 1\leqslant p\leqslant p_1$$

Начальный радиус y_0 и наклон в конечной точке p_1 определяются подстановкой уравнений (2.8) в граничное условие $\eta(\xi=1)=1$.

Для сравнения рассмотрим контур, заданный уравнением $\eta=\sqrt{\xi}$. Из (1.15) имеем

$$C_Q=\frac{\tau^2}{32}\ln(1+16\tau^{-2}) \tag{2.9}$$

Ниже для различных значений τ представлено отношение d (2.9) к коэффициенту теплообмена оптимального контура.

τ	0.25	0.5	1.0	2.0
d	1.74	1.31	1.14	1.08

Полученные в данной работе аналитические решения отражают предельные случаи поставленной вариационной задачи. Тем не менее они показывают, что в ряде типичных случаев использование оптимальной формы тела позволяет существенно снизить суммарный радиационный тепловой поток к его поверхности.

Поступила 23 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башкин В. А.* О выборе характерного размера осесимметричного тела заданной формы, оптимального по условиям теплопередачи. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.
2. *Белянин Н. М.* Определение формы тела с минимальным тепловым потоком при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
3. *Белянин Н. М.* Некоторые оптимальные формы излучающих тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
4. *Боровой В. Я.* Выбор оптимального радиуса затупления осесимметричного тела с учетом излучения поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
5. *Перминов В. Д., Солодкин Е. Е.* Осесимметричные тела минимального сопротивления и минимального потока тепла к поверхности при различном характере течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
6. *Солодкин Е. Е., Пятнова А. И.* Определение оптимальной формы осесимметричного тела из условия минимального теплового потока к поверхности. Тр. ЦАГИ, 1972, сб. № 5, вып. 1374, 1974.
7. *Мурзинов И. Н.* Затупленные по сфере конусы минимальных тепловых потоков. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, стр. 173.
8. *Hoshizaki H., Wilson K. H.* Inviscid, nonadiabatic flow about blunt bodies. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1.
9. *Белоцерковский О. М., Фомин В. Н.* Расчет течений излучающего газа в ударном слое. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 2.
10. *Елькин Ю. Г.* Гиперзвуковые течения невязкого селективно излучающего газа около тупоносого тела. Тр. ЦАГИ, 1970, вып. 1258.
11. *Боголепов В. В., Елькин Ю. Г.* Обтекание сферически затупленных конусов гиперзвуковым потоком невязкого газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 2.
12. *Стулов В. П., Шапиро Е. Г.* Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
13. *Гершбейн Э. А., Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А.* Гиперзвуковое обтекание затупленных тел произвольной формы вязким излучающим газом при наличии сильного вдува инородных газов. Доклад на XXIV Международном астронавтическом конгрессе, Баку, 1973.
14. *Гершбейн Э. А., Пилюгин Н. Н.* Обтекание тел гиперзвуковым потоком невязкого объемно излучающего газа. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1974, № 32.
15. *Пилюгин Н. Н., Суходольский С. Л., Тирский Г. А.* Обтекание конуса и клина гиперзвуковым потоком излучающего газа. Сб. «Математическое моделирование аэротермохимических явлений». М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1974, стр. 156.
16. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
17. Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969.