

## ДИФFUЗИОННЫЙ ПОТОК НА ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ГАЗОВЫЙ ПУЗЫРЬ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, Ю. А. СЕРГЕЕВ

(Москва)

Определен диффузионный поток на деформированный газовый пузырь, обтекаемый однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, при больших числах Рейнольдса и Пекле и конечных числах Вебера. Пузырь имеет форму эллипсоида вращения, сплюснутого в направлении потока, что позволяет использовать поле течения, полученное в работе [1] в виде двучленного разложения по параметру  $\delta = R^{-1/2}$  ( $R$  — число Рейнольдса; нулевой член разложения соответствует потенциальному обтеканию). Получена зависимость диффузионного потока на поверхность пузыря от чисел Вебера и Рейнольдса. Таким образом, результаты работ [2, 3] обобщены на случай конечных чисел Вебера и более широкого диапазона чисел Рейнольдса.

Диффузионный поток на сферический пузырь (бесконечно малые числа Вебера) для поля скоростей, имеющего вид двучленного разложения по параметру  $\delta$  (в случае сферического пузыря см. [4-6]) был вычислен в работе [2]. В [3] задача о массообмене эллиптического пузыря решена методом диффузионного пограничного слоя для течения при малых числах Рейнольдса [7].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим диффузию растворенного вещества к пузырю, обтекаемому установившимся однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, при больших числах Пекле и Рейнольдса. Пузырь имеет форму эллипсоида вращения, сплюснутого в направлении потока, т. е. в декартовой системе координат, связанной с центром пузыря, его поверхность определяется уравнением (ось  $z$  направлена вдоль потока)

$$(1.1) \quad (x^2 + y^2) / A^2 + z^2 / a^2 = 1, \quad A = a\chi, \quad \chi \geq 1$$

Форма движущегося в вязкой жидкости газового пузыря зависит от числа Вебера  $W = 2a_e \rho U^2 / \alpha$  ( $U$  — установившаяся скорость пузыря,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $a_e$  — радиус сферы, объем которой равен объему пузыря). При малых  $W$  пузырь сохраняет сферическую форму; при больших  $W$  пузырь принимает вид сферического сегмента [8], что связано также и с явлениями отрыва потока в кормовой части пузыря [9].

Значения чисел Вебера порядка единицы составляют важную для практики промежуточную область изменения  $W$ , когда пузырь, будучи существенно деформированным, сохраняет симметрию формы относительно своего миделева сечения. Для таких значений  $W$  форма пузыря хорошо аппроксимируется сплюснутым в направлении потока эллипсоидом вращения [10-12]. При этом оказывается, что требование выполнения граничного условия для нормальных напряжений в передней и задней критических точках, а также вдоль границы миделева сечения пузыря приводит к следующей зависимости между числом Вебера и отношением  $\chi$  большой и малой полуосей эллипсоида [1]:

$$W = 4\chi^{-1/3} (\chi^3 + \chi - 2) [\chi^2 \arccos \chi - (\chi^2 - 1)^{1/2}]^2 (\chi^2 - 1)^{-3}$$

Численные оценки показывают [1], что максимальное отклонение истинной кривизны границы пузыря от соответствующего значения для

аппроксимирующего эллипсоида не превышает 10% при  $W=2.8$  ( $\chi \approx 2$ ) и 5% при  $W=2$  ( $\chi \approx 1.5$ ).

Важно оценить также порядок чисел Рейнольдса, при которых форма пузыря начинает существенно отклоняться от сферической. Простые оценки дают возможность установить [1], что отклонение формы пузыря от сферической более чем на 5% ( $\chi \geq 1.05$ ) происходит при

$$R \geq 0.55M^{-1/2}, \quad M = g\rho^3 v^4 / \alpha^3$$

Здесь  $R = aU / \nu$  — число Рейнольдса,  $M$  — безразмерный параметр [13], зависящий только от свойств жидкости,  $g$  — ускорение поля внешних сил. Для многих жидкостей, в частности для воды и многих летучих органических жидкостей,  $M = O(10^{-10})$  (малые  $M$ ). Для других жидкостей величина  $M$  может достигать значений порядка  $10^{-2}$ ; к таким жидкостям относятся, например, нефть.

При больших  $M$  деформация пузыря становится существенной уже при малых  $R$ , а при больших  $R$  форма пузыря значительно отличается от эллипсоидальной. Для малых  $M$  деформацию необходимо принимать во внимание, начиная с  $R = O(10^2)$ . При таких значениях  $R$  в свою очередь становятся существенными полученные Муром [1] поправки к полю скоростей потенциального обтекания пузыря, имеющие порядок  $R^{-1/2}$ , что и учитывается в данной работе.

Таким образом, приводимый ниже анализ относится к движению пузырей в жидкостях, параметр  $M$  которых мал (т. е. порядка  $10^{-10}$  и меньше). Значения  $M$  для большого числа жидкостей, обладающих этим свойством (ацетон, бензол, гидразин и др.), приведены, в частности, в работе [1].

Перейдем к определению диффузионного потока на поверхность пузыря. Используем ортогональные координаты [1]  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\varphi$ , определенные соотношениями

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x &= a\xi_0^{-1} [(1+\xi^2)(1-\zeta^2)]^{1/2} \cos \varphi \\ y &= a\xi_0^{-1} [(1+\xi^2)(1-\zeta^2)]^{1/2} \sin \varphi \\ z &= a\xi_0^{-1} \xi \zeta, \quad \xi_0 = (\chi^2 - 1)^{-1/2} \end{aligned}$$

В системе координат  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\varphi$  поверхность пузыря задается уравнением  $\xi = \xi_0 = \text{const}$ ,  $-1 \leq \zeta \leq 1$  (при этом  $\zeta = -1$  соответствует точке набегающего потока); оно получается в результате подстановки (1.2) в уравнение (1.1).

Уравнение конвективной диффузии в системе координат  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\varphi$  имеет вид (в рассматриваемой задаче поле скоростей и распределение концентрации не зависят от угла  $\varphi$ )

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \frac{D}{H_\xi H_\zeta H_\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H_\zeta H_\varphi}{H_\xi} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{H_\varphi H_\xi}{H_\zeta} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{H_\xi} v_\xi \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\zeta} v_\zeta \frac{\partial c}{\partial \zeta} \\ & H_\xi = a\xi_0^{-1} \left( \frac{\xi^2 + \zeta^2}{1 + \xi^2} \right)^{1/2}, \quad H_\zeta = a\xi_0^{-1} \left( \frac{\xi^2 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \right)^{1/2} \\ & H_\varphi = a\xi_0^{-1} [(1 + \xi^2)(1 - \zeta^2)]^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $c$  — концентрация диффундирующего вещества,  $D$  — коэффициент диффузии,  $H_\xi$ ,  $H_\zeta$ ,  $H_\varphi$  — коэффициенты Ляме.

Поле скоростей жидкости  $v_\xi$ ,  $v_\zeta$  получено в работе [1] и имеет вид двучленного разложения по параметру  $\delta = R^{-1/2}$

$$(1.4) \quad v_\xi = v_{0\xi} + \delta v_{1\xi}, \quad v_\zeta = v_{0\zeta} + \delta v_{1\zeta}$$

Здесь  $v_{0\xi}$ ,  $v_{0\zeta}$  — компоненты скорости потенциального обтекания пузыря.

Считая пузырь областью полного поглощения вещества и отсчитывая концентрацию от ее значения в пузыре, запишем граничные условия в виде

$$(1.5) \quad \xi = \xi_0, \quad c = 0; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c = c_0$$

При больших числах Пекле  $P = aU/D$  процесс диффузии протекает в диффузионном пограничном слое вблизи поверхности пузыря  $\xi = \xi_0$ . Ниже предполагается, что  $P^{1/2} \gg R^{1/2}$  (в капельных жидкостях обычно  $P \sim 10^6 R$ ), т. е. толщина диффузионного пограничного слоя существенно меньше толщины рассмотренного в [1, 6] гидродинамического пограничного слоя, в котором существенны поправки  $v_{1\xi}$ ,  $v_{1\zeta}$  к потенциальному обтеканию. Последнее предположение позволяет при анализе диффузионного пограничного слоя использовать лишь распределение скоростей на границе пузыря.

Оценивая обычным образом порядки различных членов в уравнении (1.3), переходя к переменным  $\psi$ ,  $\zeta$  ( $\psi$  — функция тока жидкости) и учитывая, что  $v_{1\zeta} = (H_{\zeta} H_{\varphi})^{-1} \partial \psi / \partial \xi$ , получим уравнение диффузионного пограничного слоя и граничные условия в виде

$$(1.6) \quad \frac{\partial c}{\partial \zeta} = DH_{\zeta}^{\circ} (H_{\varphi}^{\circ})^2 v_{1\zeta}^{\circ} \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}$$

$$\psi = 0, \quad c = 0; \quad \psi \rightarrow \infty, \quad c = c_0$$

$$\psi = 0, \quad \zeta = -1, \quad c = c_0$$

Последнее условие выражает необедненность потока в точке набегания. Верхний индекс « $\circ$ » означает, что соответствующие величины рассматриваются при  $\xi = \xi_0$ . Значение  $v_{1\zeta}^{\circ}$  имеет вид [1]

$$(1.7) \quad v_{1\zeta}^{\circ} = v_{0\zeta}^{\circ} + \delta v_{1\zeta}^{\circ}$$

$$v_{0\zeta}^{\circ} = U \frac{p(\xi_0)}{1 + \xi_0^2} \left( \frac{1 - \zeta^2}{\xi_0^2 + \zeta^2} \right)^{1/2}$$

$$p(\xi_0) = [\text{arc ctg } \xi_0 - \xi_0 / (1 + \xi_0^2)]^{-1}$$

$$v_{1\zeta}^{\circ} = U \left( \frac{2}{3} \frac{p(\xi_0)}{\xi_0} \frac{\xi_0^2 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \right)^{1/2} u(\xi_0, \zeta)$$

$$u(\xi_0, \zeta) = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{\zeta} \frac{\xi_0^2 (1-x)^2}{(\xi_0^2 + x^2)^2} \frac{dx}{\sqrt{X(\zeta) - X(x)}}$$

$$X(x) = \frac{2}{9} (x+1)^2 (2-x)$$

**2. Определение диффузионного потока. Обсуждение результатов.** Решение задачи (1.6) имеет вид

$$(2.1) \quad c = \frac{2c_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-z^2) dz, \quad \eta = \frac{\psi}{2\sqrt{t}(\xi_0, \zeta)}$$

$$t(\xi_0, \zeta) = \int_{-1}^{\zeta} DH_{\zeta}^{\circ} (H_{\varphi}^{\circ})^2 v_{1\zeta}^{\circ} d\zeta$$

Для дифференциального потока на пузырь имеем

$$(2.2) \quad j = -D \frac{1}{H_{\xi}^{\circ}} \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_{\psi=0} = \frac{Dc_0}{\sqrt{\pi}} \frac{H_{\varphi}^{\circ} v_{\xi}^{\circ}}{\sqrt{t(\xi_0, \zeta)}}$$

При вычислении полного потока следует заметить, что элемент поверхности пузыря  $dS$  определяется выражением  $dS = 2\pi H_{\xi}^{\circ} H_{\varphi}^{\circ} d\xi$ , так что полный поток равен

$$(2.3) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{Dc_0}{\sqrt{\pi}} \frac{H_{\varphi}^{\circ} v_{\xi}^{\circ}}{\sqrt{t(\xi_0, \zeta)}} 2\pi H_{\xi}^{\circ} H_{\varphi}^{\circ} d\xi = 4\sqrt{\pi} c_0 \sqrt{t(\xi_0, 1)}$$

Среднее число Шервуда удобно определить, выбрав в качестве характерного размера диаметр эквивалентной по объему сферы  $2a_e = 2\chi^{2/3}a$ , т. е.

$$(2.4) \quad Sh = I / (2\pi\chi^{2/3}aDc_0)$$

В нулевом приближении, соответствующем потенциальному обтеканию пузыря, из (1.7), (2.1) следует:

$$t_0(\xi_0, \zeta) = DUa^3 \xi_0^{-3} p(\xi_0) \left( -\frac{1}{3} \zeta^3 + \zeta + \frac{2}{3} \right)$$

Вспоминая, что  $\xi_0 = (\chi^2 - 1)^{-1/2}$ , для полного потока имеем

$$(2.5) \quad Sh_0 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} P^{1/2} \Lambda(\chi)$$

$$\Lambda(\chi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\chi^2 - 1)^{3/4}}{\chi^{2/2}} \left[ \arctg(\chi^2 - 1)^{1/2} - \frac{(\chi^2 - 1)^{1/2}}{\chi^2} \right]^{-1/2}$$

Легко убедиться, что  $\Lambda(\chi) \rightarrow 1$  при  $\chi \rightarrow 1$ , что соответствует сферическому пузырю.

Для вычисления поправок к полному потоку, учитывающих влияние числа Рейнольдса, запишем функцию  $t(\xi_0, \zeta)$  в виде

$$(2.6) \quad t(\xi_0, \zeta) = t_0(\xi_0, \zeta) + \delta t_1(\xi_0, \zeta)$$

$$t_1(\xi_0, \zeta) = \int_{-1}^{\zeta} DH_{\xi}^{\circ} (H_{\varphi}^{\circ})^2 v_{\xi}^{\circ} d\zeta$$

Вычисление  $t_1(\xi_0, \zeta)$  с использованием формул (1.7) приводит к выражению

$$(2.7) \quad t_1(\xi_0, \zeta) = \sqrt{\frac{2}{3}} DUa^3 \xi_0^{-7/2} p^{1/2}(\xi_0) (1 + \xi_0^2) J(\xi_0, \zeta)$$

$$J(\xi_0, \zeta) = \int_{-1}^{\zeta} (\xi_0^2 + y^2) u(\xi_0, y) dy$$

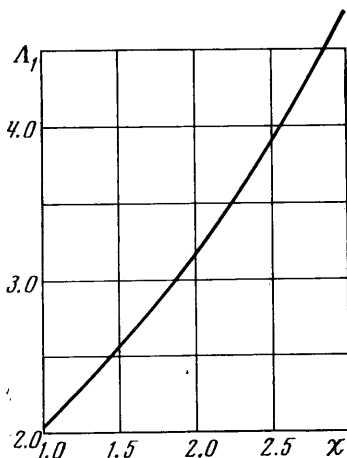
Функция  $u(\xi_0, y)$  определена в (1.7) и в общем случае может быть представлена комбинацией эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода.

Заметим, что выражение (1.7) для  $v_{\xi}^{\circ}$  становится непригодным при  $\xi \geq 1 - O(\delta^{2/3})$  (см. [1, 6]); в частности,  $v_{\xi}^{\circ} \rightarrow \infty$  при  $\zeta \rightarrow 1$ . Следовательно, дифференциальный поток может быть вычислен с использованием (2.6), (2.7) лишь для меньших  $\zeta$ .

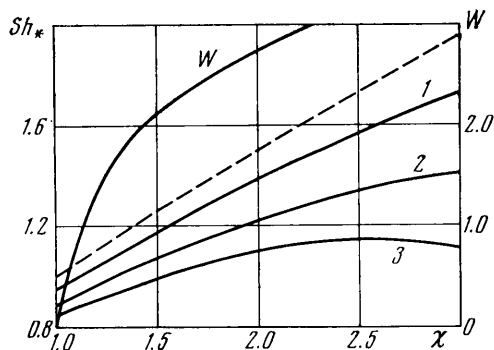
Для вычисления полного потока по формуле (2.3) заметим, что интегралы в (2.7) сходятся и

$$t_1(\xi_0, 1) = t_1(\xi_0, 1 - O(\delta^{2/3})) + O(\delta^{2/3})$$

Как показано в [6],  $v_{1z} = O(\delta^{2/3})$  в кормовой области  $1 - O(\delta^{2/3}) \leq \xi \leq 1$ , так что правильный учет порядка поправки к скорости в этой области приводит к отличию в величине  $t_1(\xi_0, 1)$ , вычисленной с помощью (2.7),



Фиг. 1



Фиг. 2

также на величину  $O(\delta^{2/3})$ . Следовательно, для вычисления полного потока по формуле (2.3) можно использовать (2.7) при условии  $\delta^{2/3} \ll 1$ .

Как следует из (2.3) – (2.6), среднее число Шервуда имеет вид

$$(2.8) \quad \text{Sh} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} P^{1/2} \Lambda(\chi) [1 - \delta \Lambda_1(\chi) + o(\delta)]^{1/2}$$

$$\Lambda_1(\chi) = -t_1(\xi_0, 1) / t_0(\xi_0, 1) = O(1)$$

Здесь  $\Lambda_1(\chi)$  – функция, которая определяет поправку к полному потоку при потенциальном обтекании, учитывающую влияние чисел Рейнольдса.

При  $\chi \neq 1$  интеграл  $J(\xi_0, \xi)$  в (2.7), определяющий  $\Lambda_1(\chi)$ , рассчитывался численно. Соответствующие результаты для функции  $\Lambda_1(\chi)$  и числа Шервуда  $\text{Sh}_* = \sqrt{\pi/8} P^{-1/2} \text{Sh}$  приведены на фиг. 1, 2. При  $\chi = 1$  (сферический пузырь) интеграл  $J(\xi_0, \xi)$  легко вычисляется в элементарных функциях. В этом случае результаты, совпадающие с полученными в [2], имеют вид

$$\Lambda(1) = 1, \quad \Lambda_1(1) = \frac{72}{5\sqrt{6}\pi} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \approx 2.05.$$

Отметим также, что, как следует из фиг. 1, 2, полученные результаты могут быть аппроксимированы во всем рассматриваемом интервале чисел Вебера следующими простыми выражениями:

$$(2.9) \quad \Lambda(\chi) = \frac{1+\chi}{2}, \quad \Lambda_1(\chi) = \frac{1}{5}(\chi^2 + 3\chi + 6)$$

Максимальное отклонение от точных значений при этом не превышает 3%.

Приведенная на фиг. 1 зависимость  $\Lambda_1$  от  $\chi$  свидетельствует о значительном росте поправки к полному потоку с ростом чисел Вебера.

На фиг. 2 показано влияние отношения полуосей пузыря (т. е. числа Вебера) на среднее число Шервуда. Пунктирная кривая изображена для потенциального обтекания, соответствующего асимптотике при  $R \rightarrow \infty$ , сплошные кривые 1–3 соответствуют значениям  $R$ , равным 500, 100, 50. Приведенные результаты свидетельствуют о значительном снижении полного потока при уменьшении чисел Рейнольдса, причем это снижение наиболее существенно при больших деформациях пузыря, т. е. при больших числах Вебера. Так, при  $R=50$ ,  $W=3.25$  ( $\chi=2.5$ ) поток снижается более чем в 1.5 раза. При фиксированных числах Рейнольдса  $R \geq 60$  с увеличением числа Вебера полный диффузионный поток монотонно растет. При меньших числах Рейнольдса диффузионный поток достигает максимума при некотором значении  $W$  и уменьшается при дальнейшем увеличении числа Вебера.

Полученные результаты определяют зависимость диффузионного потока от чисел Вебера и Рейнольдса. Зависимость параметра  $\chi$  от числа Вебера может быть определена обращением формулы [1], приведенной в начале данной работы. Подчеркнем, что рассматриваемый в данной работе интервал изменения параметра  $\chi$  соответствует числам Вебера, при которых форма пузыря еще достаточно близка к эллипсоиду вращения.

На фиг. 2 приведена также зависимость  $W(\chi)$ , что позволяет определить  $\Lambda_1$  и  $Sh$  как функции непосредственно числа Вебера.

**3. Область применимости результатов по числам Пекле.** Для оценки предела применимости полученного решения по числам Пекле необходимо найти порядок поправки к решению уравнения диффузионного пограничного слоя, вносимый решением полного уравнения конвективной диффузии при больших числах Пекле.

Порядок следующего после главного члена разложения решения уравнения конвективной диффузии может быть найден при помощи метода, аналогичного использованному в [14] для вычисления высших приближений в задаче о диффузии к твердой частице.

Для определения порядка следующего члена разложения достаточно рассмотреть сферический пузырь. Введем обычным образом безразмерные сферические координаты  $(r, \theta)$  (в качестве характерного размера выбран радиус пузыря). Так как толщина диффузионного пограничного слоя для пузыря (или капли) имеет порядок  $P^{-1/2}$ , введем растянутую координату  $\rho = (r-1)P^{1/2}$ . При помощи процедуры, аналогичной [14], найдем распределение концентрации в виде

$$(3.1) \quad c = c_0 + P^{-1/2}c_1 + O(P^{-1})$$

Здесь  $c_0$  представляет собой главную асимптотику, являющуюся решением уравнения диффузионного пограничного слоя;  $c_0 = O(1)$ . Уравнения и граничные условия для  $c_1$ , получаемые при помощи метода [14], показывают, что  $c_1 = O(1)$ . Отсюда для диффузионного потока следует:

$$(3.2) \quad Sh = \sqrt{8/\pi} P^{-1/2} [1 + O(\delta) + O(P^{-1/2})]$$

Полученное в п. 2 решение, учитывающее поправку к потенциальному обтеканию, применимо, пока  $\delta \gg P^{-1/2}$ , т. е.

$$P^{1/2} \gg R^{1/2}$$

что фактически и означает малость толщины диффузионного пограничного слоя по сравнению с толщиной гидродинамического пограничного слоя, предположенную в п. 1.

Отметим, что сказанное выше справедливо и в общем случае, когда метод диффузионного пограничного слоя применяется к задачам, в которых поле скоростей представлено в виде разложения по некоторому малому параметру. Результаты решения таких задач обычно имеют вид, аналогичный (3.2), где  $\delta$  — некоторый малый параметр (необязательно связанный с числом Рейнольдса), и условия применимости решения имеют вид  $\delta \gg P^{-1/2}$ . Сказанное остается справедливым, если разложение для поля скоростей содержит и другие степени  $\delta$  (каждая входящая в разложение степень параметра должна существенно превышать  $P^{-1/2}$ ). В случае твердой частицы условие применимости разложений по параметру  $\delta$  имеет вид  $\delta \gg P^{-1/3}$ , как следует из [14].

Поступила 18 XII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 4.
2. Winnikow S. Letter to the Editors. Chem. Engng Sci., 1967, vol. 22, No. 2.
3. Sy F., Lightfoot E. N. The effect of distortion on mass transfer to spheroidal drops. A.I.C.h.E. Journal, 1968, vol. 14, No. 5.
4. Chaw B. T. Motion of spherical gas bubbles in a viscous liquid at large Reynolds numbers. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 1.
5. Winnikow S., Chao B. T. Droplet motion in purified systems. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 1.
6. Moore D. W. The boundary layer on a spherical gas bubble. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, pt 2.
7. Taylor T. D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt. 3.
8. Davies R. M., Taylor G. I. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 200, No. 1062.
9. Moore D. W. The rise of a gas bubble in a viscous fluid. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, pt. 1.
10. Siemes W. Gasblasen in Flüssigkeiten. Teil 2: Der Aufstieg von Gasblasen in Flüssigkeiten. Chemie — Ingr — Techn., 1954, Bd. 26, H. 11.
11. Saffman P. G. On the rise of small air bubbles in water. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt 3.
12. Hartunian R. A., Sears W. R. On the instability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids. J. Fluid Mech., 1957, vol. 3, pt 1.
13. Peebles F. N., Garber H. J. Studies on the motion of gas bubbles in liquids. Chem. Engng Progr., 1953, vol. 49, No. 2.
14. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced — convection heat and mass transfer, pt 1. Low speed flows. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 2.