МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1976

УДК 532.547

О ДИСПЕРСИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Рассматривается перенос динамически нейтральной примеси в пористой среде со случайными неоднородностями. Первые варианты уравнений для средней концентрации примеси [1, 2] основывались на принятии гипотезы о марковости процесса блужданий части и использовании диффузионных уравнений А. Н. Колмогорова [1]. Позднее в [3, 4] методом возмущений исследовалась полная система уравнений для концентрации примеси и случайной скорости фильтрации при постоянной неслучайной пористости, приводящая после осреднений к нелокальному уравнению для средней концентрации. Показано, что в предельных случаях мелкомасштабных и крупномасштабных неоднородностей по проницаемости среды интегродифференциальное уравнение локализуется в соответственно параболическое и гиперболические уравнения второго порядка. Ниже методом возмущений исследуется задача переноса примеси потоком, скорость фильтрации которого флуктуирует на неоднородностях поля проницаемости, в среде, пористость которой также является случайным полем, коррелирующим с полем проницаемости. Получены уравнения для средней концентрации и сформулированы соответствующие краевые задачи для этих уравнений, вычислены компоненты тензора дисперсии. Рассмотрена также равновесная сорбция примеси.

1. Уравнения квазиодномерного течения. Рассмотрим перенос примеси квазиодномерным потоком, средняя скорость которого постоянна, а флуктуации скорости являются статистически однородным случайным полем. Пусть для локальной концентрации примеси и фильтрационных переменных имеет место система уравнений

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{V}\nabla c=0,\quad \mathbf{V}=-\frac{k}{\mu}\nabla p,\quad \operatorname{div}\mathbf{V}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $m(\mathbf{x})$ и $k(\mathbf{x})$ — случайные поля пористости и проницаемости, функции вектора $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, μ — вязкость жидкости, транспортирующей примесь, p — давление, $\mathbf{V}$ — скорость фильтрации, t — время, c — концентрация примеси.

Представим поля m, k, $\mathbf{V}$ и c в виде

$$m=m_0+m',\quad m_0=\langle m\rangle,\quad k=k_0+k',\quad k_0=\langle k\rangle$$
$$\mathbf{V}=\mathbf{W}+\mathbf{V}',\quad \mathbf{W}=\langle\mathbf{V}\rangle,\quad c=u+c',\quad u=\langle c\rangle$$

После усреднения первого уравнения (1.1) получим

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=-\left\langle m'\frac{\partial c'}{\partial t}\right\rangle-\langle\mathbf{V}'\nabla c'\rangle \tag{1.2}$$

Вычитая из первого уравнения (1.1) уравнение (1.2) и сохраняя главные члены, получим уравнение для $c'(\mathbf{x},t)$

$$m_0\frac{\partial c'}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla c'=-m'\frac{\partial u}{\partial t}-\mathbf{V}'\nabla u \tag{1.3}$$

[1] В [1] приведена библиография работ Шейдеггера, В. Н. Николаевского, В. М. Шестакова, изучавших фильтрационную дисперсию в системе поровых каналов макрооднородных сред и указавших на аналогию этого процесса с дисперсией в макронеоднородных системах.

Дополнительные детерминированные условия, наложенные на c, отнесем к u, тогда соответствующие условия для c' являются однородными и, следовательно,

$$c'(\mathbf{x},t)=-\frac{1}{m_0}\int_0^t\left[m'(\mathbf{z})\frac{\partial u(\mathbf{z},\tau)}{\partial\tau}+\mathbf{V}'(\mathbf{z})\nabla_z u(\mathbf{z},\tau)\right]d\tau \tag{1.4}$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{W}m_0^{-1}(t-\tau)$$

Подставив (1.4) в правую часть уравнения (1.2), после усреднения и преобразований получим

(1.5)

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{1}{m_0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left[M_{m,m}(\mathbf{x},\mathbf{z})\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial\tau}+M_{m,v}(\mathbf{x},\mathbf{z})\nabla_z u(\mathbf{z},\tau)\right]d\tau+\right.$$

$$+\int_0^t\left[\nabla_z M_{m,v}(\mathbf{z},\mathbf{x})\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial\tau}+M_{m,v}(\mathbf{z},\mathbf{x})\frac{\partial\nabla u(\mathbf{z},\tau)}{\partial\tau}+\right.$$

$$\left.\left.+M_{v,v}^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{z})\frac{\partial^2 u(\mathbf{z},\tau)}{\partial x_i\,\partial z_j}\right]d\tau\right\}$$

$$M_{m,m}(\mathbf{x},\mathbf{z})=\langle m'(\mathbf{x})m'(\mathbf{z})\rangle,\quad M_{m,v}(\mathbf{x},\mathbf{z})=\langle m'(\mathbf{x})V'(\mathbf{z})\rangle,$$

$$M_{v,v}^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{z})=\langle V_i'(\mathbf{x})V_j'(\mathbf{z})\rangle$$

Таким образом, если введенные корреляции нелокальны, уравнение для u также нелокально. При этом под локальностью той или иной корреляции понимается ее несущественность вне шара $|\mathbf{x}-\mathbf{z}|=\Delta\ll|\mathbf{W}|tm_0^{-1}$. Внутри же шара корреляция для простоты считается постоянной, равной одноточечному моменту. Для таких, назовем их Δ-коррелированными, полей, уравнение (1.5) упрощается. Предполагая, что поля k и m однородны и изотропны, что их взаимная корреляция также однородна и изотропна, убывает к нулю на бесконечности, легко с помощью найденных в [5] для трехмерных полей корреляционных моментов подсчитать

$$M_{m,v}(\mathbf{x},\mathbf{x})=\frac{2}{3}\frac{\gamma\delta\rho}{k_0}\mathbf{W}_0,\quad M_{v,v}^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x})=\frac{\delta^2|\mathbf{W}|^2}{15k_0^2}\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$\gamma=(\langle m'^2\rangle)^{1/2},\qquad \delta=(\langle k'^2\rangle)^{1/2},\qquad \rho=\langle k'm'\rangle\gamma^{-1}\delta^{-1}$$

Используя (1.6) и совместив ось x_1 с вектором $\mathbf{W}$, получим

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\Delta}{|W|}\left[M_{v,v}^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\right. \tag{1.7}$$

$$\left.+\frac{4\gamma\delta\rho}{3k_0}W\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_1}\right]$$

Если исследуется плоская фильтрация, то следует положить

$$M_{m,v}(\mathbf{x},\mathbf{x})=\frac{\gamma\delta\rho}{2k_0}\mathbf{W},\quad M_{v,v}^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x})=\frac{\delta^2|\mathbf{W}|^2}{8k_0^2}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

После преобразований получим

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\Delta}{|W|}\left[M_{v,v}^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\gamma\delta\rho}{k_0}W\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}\right] \tag{1.8}$$

В одномерном случае пористость и скорость фильтрации (функция времени) не коррелируют, уравнение для u имеет вид

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\tau\sigma^2}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\Delta\gamma^2}{|W|}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\qquad \sigma^2=\langle V'^2\rangle \tag{1.9}$$

Здесь τ — время корреляции процесса $V'(t)$.

2. Постановка задач и их регуляризация. Вопрос о постановке задач и возникающие при этом трудности рассмотрим на примере одномерной задачи в области $x\geqslant 0$, $t>0$. Пусть для определенности на функцию $c(x, t)$ наложены дополнительные неслучайные условия — задано начальное распределение $c(x, t)$ и его значение при $x=0$, $t>0$. Отнесем эти условия к искомой функции u. Тогда при $\gamma=0$, $\sigma\neq 0$ уравнение (1.9) параболическое и задача разрешима, решение единственно и устойчиво. При $\gamma\neq 0$, $\sigma\neq 0$ уравнение (1.9) эллиптического типа, краевая задача с перечисленными условиями на границах квадрата $x>0$, $t>0$ — задача Дирихле, что обеспечивает единственность и устойчивость решения. Тем не менее задача некорректна, поскольку нарушается принцип причинности. В самом деле, область зависимости условий, заданных на границе $x=0$, в том случае — вся область $t>0$ (следствие эллиптичности), что приводит к неприемлемой зависимости «прошлого» от «будущего».

Если при $t=0$ кроме $u(x, 0)$ задать еще и $u_t(x, 0)$, то получим задачу Коши для эллиптического уравнения, как известно некорректную вследствие неустойчивости по начальным условиям.

Аналогично обстоит дело с постановкой задач для уравнений (1.7) и (1.8), которые, как легко проверить, при $\gamma\neq 0$ эллиптические в пространстве (x, t).

Возможный путь регуляризации задачи состоит в следующем. Обратившись к уравнениям (1.7), (1.8), заметим, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=O(\delta^2\Delta,\gamma^2\Delta,\gamma\delta\Delta) \tag{2.1}$$

Поэтому в правых частях этих уравнений с точностью до малых более высокого порядка можно заменить $u_t=-Wm_0^{-1}u_{x_1}$, $u_{tt}=W^2m_0^{-2}u_{x_1x_1}$. В этом случае уравнение (1.9) примет вид

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\tau\sigma^2}{m_0}+\frac{\gamma^2\Delta|W|}{m_0^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

Очевидно, уравнение (2.2) параболическое и задание $u(x, 0)$ и $u(0, t)$ делает задачу корректной.

Поступая аналогично, получим уравнение переноса для плоского и пространственного фильтрационных течений соответственно

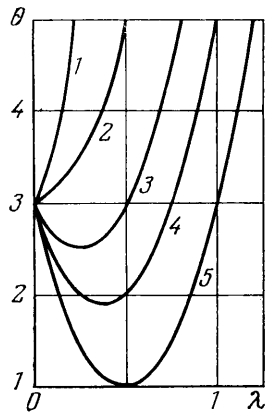
$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\Delta|W|\zeta^2}{8}\left[(8\lambda^2-8\lambda\rho+3)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] \tag{2.3}$$

$$(\zeta=\delta/k_0,\ \lambda=\gamma/m_0\zeta)$$

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\Delta|W|\zeta^2}{15}\left[(15\lambda^2-20\lambda\rho+8)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right] \tag{2.4}$$

Нетрудно убедиться, что при любых значениях коэффициента корреляции ρ, параметров ζ и λ коэффициенты продольной и поперечной дисперсии положительны, что обеспечивает корректность задания для уравнений (2.3) или (2.4) функции $u(x, 0)$ и условий на границах при $t>0$.

Можно видеть, что флуктуации пористости в отличие от проницаемости влияют только на коэффициент продольной дисперсии. При этом отрицательная корреляция пористости и проницаемости усиливает продольную дисперсию, а положительная ослабляет тем сильнее, чем больше $|\rho|$.



Если считать ζ фиксированным, то для каждого $\rho>0$ существует λ^*, для которого коэффициент продольной дисперсии минимален. Так, в случае плоского течения это $\lambda^*=\rho/2$, для пространственного течения $\lambda=2\rho/3$. На фигуре изображена зависимость θ — отношения продольной и поперечной компонент тензора дисперсии, от параметров λ и ρ для плоского течения. Кривые *1—5* соответствуют значениям $\rho=-1$, 0, $^1/_2$, $^3/_4$, 1. Можно видеть, что «внесение» в пористую среду достаточно малых возмущений пористости приводит при $\rho>0$ к уменьшению θ, т. е. продольной компоненты, которая в интервале $0<\lambda<\lambda^*$ может существенно отличаться от дисперсии, невозмущенной по λ. Так, при $\lambda={}^1/_2$ и $\rho=1$ величина $\theta=1$, т. е. тензор дисперсии изотропен, в то время как при $\lambda=0$ дисперсия существенно анизотропна, так как $\theta=3$. В определенной степени парадоксально, но взаимодействие потока с полями пористости и проницаемости в случае $\lambda={}^1/_2$; $\rho=1$ приводит к изотропному рассеянию примеси. Например, круглое пятно «меченой» жидкости, помещенное в такой поток, будет двигаться по потоку, расширяясь, но не теряя формы.

В случае пространственной фильтрации минимальное значение θ, реализуемое при $\rho=1$ и $\lambda={}^2/_3$, составляет $^4/_3$. Это означает, что дисперсия при фильтрации в пространстве трех измерений анизотропна при любых соотношениях определяющих параметров. Шар меченой жидкости, двигаясь по потоку, деформируется в эллипсоид вращения. Однако при минимальном θ степень его вытянутости невелика. Для сравнения уместно подчеркнуть, что при невозмущенном по пористости течении ($\lambda=0$), величина $\theta=8$, т. е. анизотропия весьма существенна.

Перечисленные выше эффекты имеют следующее качественное объяснение. Так, например, независимость поперечных компонент тензора дисперсии от флуктуаций пористости объясняется независимостью поля скоростей фильтрации от пористости и некоррелированностью поперечных пульсаций скорости с проницаемостью, а следовательно, и с пористостью. Напротив, корреляция продольных пульсаций скорости с проницаемостью определяет зависимость продольной компоненты тензора дисперсии от флуктуаций пористости при $\rho=0$. При этом существенно, что интенсивность переноса и дисперсии примеси положительно коррелирует с модулем скорости фильтрации и отрицательно — с пористостью. Поэтому при положительной корреляции пористости и проницаемости имеет место эффект уменьшения анизотропии дисперсии. То, что в плоском течении возможна полная изотропия дисперсии, определяется относительно меньшей анизотропией (при $\lambda=0$, $\theta=3$), чем в пространственном случае, где $\theta=8$, и тем,

что коэффициент корреляции проницаемости и модуля скорости на плоскости меньше, чем в пространстве.

Рассмотренная выше задача аналогичным образом обобщается на случай, когда примесь, транспортируемая потоком, может сорбироваться пористой средой. Если сорбция равновесна, а Γ — коэффициент Генри — является случайным полем, коррелирующим с полями пористости и проницаемости, уравнения (2.3), (2.4) для средней концентрации остаются в силе, но при этом необходимо сделать следующие замены $m_0 \to m_*$, $\gamma \to \gamma_*$, $\rho \to \rho_*$, где

$$m_* = m_0 + \Gamma_0, \quad \Gamma_0 = \langle \Gamma \rangle, \quad \gamma_*^2 = \gamma^2 + \nu^2 + 2\nu\gamma\rho(m, \Gamma),$$
$$\nu^2 = \langle \Gamma'^2 \rangle, \quad \rho_* = \gamma_*^{-1}[\gamma\rho(k, m) + \nu\rho(k, \Gamma)]$$

а символ $\rho(\alpha, \beta)$ обозначает коэффициент корреляции случайных величин α и β.

Автор признателен А. И. Шнирельману за полезные обсуждения.

Поступила 13 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мендельсон М. М., Швидлер М. И.* О дисперсионных фильтрационных эффектах в средах со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
2. *Буевич Ю. А., Леонов А. И., Сафрай В. М.* Структура фильтрационной псевдотурбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
3. *Швидлер М. И.* О дисперсии фильтрационного потока в средах со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
4. *Швидлер М. И.* Дисперсия фильтрационного потока в средах со случайными неоднородностями. Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 1.
5. *Швидлер М. И., Мендельсон М. М.* Корреляционный анализ фильтрационного поля в средах со случайными неоднородностями. В сб. «Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта». Тр. Всес. нефтегазового науч.-исслед. ин-та, вып. 60. М., «Недра», 1974.