

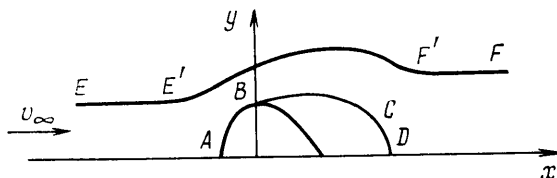
ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА В ТРУБЕ

Э. Л. АМРОМИН, А. Н. ИВАНОВ

(Ленинград)

Задача об осесимметричном обтекании тела в круглой трубе с произвольной формой меридионального сечения сведена к численному решению системы двух интегральных уравнений для определения формы каверны и интенсивности вихревых колец, размещаемых на твердых границах и границе каверны. Приведены результаты расчетов кавитационного обтекания шара, эллипсоида вращения и конуса в цилиндрической трубе, а для конуса также в конических сужающихся и расширяющихся трубах и в гидродинамической трубе с реальной формой конфузорного и рабочего участков.

Рассматривается задача об осесимметричном обтекании в режиме развинутой кавитации тела вращения, помещенного в трубу с круговой формой поперечных сечений. Жидкость считается идеальной, невесомой, несжимаемой, течение — установившимся, безвихревым. Давление внутри каверны принимается постоянным, а ее граница полагается непроницаемой, т. е. обтекается аналогично границе твердого тела. Для моделирования течения в хвосте каверны используется обобщенная схема Рябушинского, согласно



Фиг. 1

которой граница каверны замыкается на фиктивное тело произвольной формы, характерный размер которого (например, площадь наибольшего поперечного сечения) в общем случае заранее неизвестен и подлежит определению.

К постановке указанной задачи можно подойти, рассматривая продольное обтекание безграничным однородным потоком трубы, внутри которой помещено тело. На форму меридионального сечения тела и трубы особых ограничений не накладывается, за исключением требования, чтобы радиусы входного и выходного участков трубы были постоянными на достаточно большом протяжении по ее длине, что гарантирует постоянство скорости во всех точках входного и выходного сечений.

На фиг. 1 изображено меридиональное сечение трубы и тела. Входному и выходному участкам трубы соответствуют отрезки прямых EE' и FF' . Между точками E' и F' радиус трубы изменяется по произвольному закону. Дуга AB представляет собой часть контура меридионального сечения тела, свободную от кавитации, BC — контур границы каверны, CD — контур меридионального сечения фиктивного тела, на которое замыкается

хвостовая часть каверны. Решение кавитационной задачи заключается в нахождении формы каверны и распределения скоростей и давлений по лобовой части тела, свободной от кавитации. В случае необходимости могут быть определены также скорости и давления на стенках трубы и в любой точке потока.

Обтекание трубы и кавитирующего тела можно заменить обтеканием концентрических относительно оси симметрии круговых вихревых колец, покрывающих стенки трубы, часть поверхности тела, свободную от кавитации, границу каверны и поверхность фиктивного тела. При этом составное тело, ограниченное частью поверхности рассматриваемого тела, свободной от кавитации, границей каверны и поверхностью фиктивного тела, можно рассматривать как единое тело с замкнутой поверхностью.

Напишем уравнение, определяющее расход жидкости через произвольное поперечное сечение трубы или составного тела

$$(1) \quad 2\pi y A + Q_1 = Q_0, \quad A = \frac{1}{4\pi} \int_s \gamma \cos(\theta - \theta_1) \frac{ds}{r}$$

Здесь y — радиус трубы или составного тела в произвольном поперечном сечении; $Q_1 = \pi y^2 v_\infty$ — расход жидкости через указанное сечение, обусловленный невозмущенным набегающим потоком; v_∞ — скорость невозмущенного набегающего потока; для точек, лежащих на поверхности составного тела, $Q_0 = 0$, поскольку оно замкнуто; для точек, лежащих на стенках трубы, $Q_0 = \pi y_0^2 v_\infty$ (y_0 — радиус входного сечения трубы).

Формула (1) содержит известное выражение компоненты векторного потенциала [1], где s — совокупность поверхностей трубы и составного тела; γ — интенсивность распределенных по s вихревых колец; r — расстояние между фиксированной и текущей координатами точек, лежащих на s . Проведенные выше формулы записаны в цилиндрической системе координат, в которой фиксированные точки определяются координатами x, y, θ_1 , а текущие — координатами ξ, η, θ .

Вследствие того что составное тело замкнуто, на его поверхности скорость по абсолютной величине равна интенсивности вихрей: $v(x) = \gamma(x)$.

На границе каверны будет постоянной скоростью, а следовательно, и вихревая интенсивность, которую в дальнейшем обозначим γ_0 . С учетом этого обстоятельства соотношение (1) можно использовать для расчета кавитационного обтекания тела в трубе. На части s , соответствующей границе каверны, искомой величиной будут координаты границы каверны, а $\gamma = \gamma_0$, на остальной части s искомой функцией будет $\gamma(x)$. Таким образом, решение кавитационной задачи можно свести к решению смешанного интегрального уравнения, поскольку для точек границы каверны (1) будет нелинейным интегральным уравнением относительно координат границы каверны, а для остальной части s — линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода для определения $\gamma(x)$.

В расчетной практике удобнее иметь дело с интегральными уравнениями второго рода, поэтому целесообразно преобразовать соответствующим образом соотношение (1). Разделив (1) почленно на $\pi y v_\infty$ и продифференцировав по нормалью к s , получим уравнение Фредгольма второго рода для вычисления $\gamma(x)$

$$(2) \quad \gamma(x) + \frac{1}{2\pi} \int_s \gamma(\xi) \frac{\cos \theta \cos(n, r)}{r^2} ds = \left(1 - \frac{Q_0}{\pi y^2}\right) \cos(\tau, x)$$

Здесь (τ, x) — угол между касательной к контуру меридионального сечения трубы или составного тела и осью x в фиксированной точке указан-

ного сечения; (n, r) — угол между нормалью и отрезком r в этой точке; $Q_0=0$ для точек составного тела и $Q_0=\pi y_0^2$ для точек поверхности трубы; вихревая интенсивность γ отнесена к v_∞ . Уравнение (2) справедливо для контура меридионального сечения трубы и составного тела с непрерывной касательной.

Координаты границы каверны также целесообразно вычислять из преобразованного уравнения (1). Поделив его почленно на $\pi y v_\infty$ и проинтегрировав по касательной к s только в точках, лежащих на границе каверны, получим

$$(3) \quad \frac{1}{4\pi} \int_s \gamma(\xi) \frac{\cos \theta \cos(\tau, r)}{r^2} ds + \cos(n, x) = 0$$

Здесь (n, x) — угол между нормалью и осью x в фиксированной точке меридионального сечения границы каверны, (τ, r) — угол между касательной и отрезком r в этой точке. Поскольку граница каверны является частью замкнутой поверхности составного тела, то в (3) было положено $Q_0=0$.

Пользуясь уравнениями (2) и (3), можно производить численные расчеты кавитационных течений путем последовательных приближений способом, аналогичным приведенному в [2]. В начале расчета задается форма меридионального сечения так называемой пробной границы каверны. Контур этого сечения должен иметь непрерывную касательную, совпадающую на концах с касательными меридиональных сечений рассматриваемого и фиктивного тела, а его наибольшая ширина не очень сильно отличаться от максимального диаметра поперечного сечения тела.

После того как форма пробной границы каверны выбрана, решается численно уравнение (2), из которого определяется функция $\gamma(x)$. При решении (2) на части S , соответствующей границе каверны, γ полагается постоянной, равной γ_0 . Найденные значения γ подставляются в (3), из которого определяются координаты точек меридионального сечения границы каверны первого приближения. Вычисленные значения координат вновь используются для определения γ из (2), после чего из (3) определяются координаты меридионального сечения границы каверны второго приближения и т. д. При расчетах γ определялось с точностью до $0,0025 v_\infty$, а максимальная площадь каверны — с точностью до 1%. Существенно повышает точность вычислений применение аппроксимаций [2]

$$(4) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 \sqrt{x} + a_3 x^2 + \dots$$

$$(5) \quad \gamma = \gamma_0 + a_2 \gamma_1 \sqrt{|x|} + \gamma_2 x + \dots$$

в окрестности точки отрыва каверны ($x=0$).

В случае фиксированного отрыва представление (5) не может быть заменено никаким другим, так как при $x=0$ $\gamma(x)$ недифференцируема. Как следует из уравнения (4), полученного путем аналитического решения задачи о течении вблизи точки отрыва каверны [2], в общем случае кривизна меридионального сечения каверны в точке отрыва обращается в бесконечность. При отрыве же каверны от поверхности гладкого тела в соответствии с условием Бриллюэна кривизна должна быть конечной, вследствие чего в (4) коэффициент a_2 должен обращаться в нуль. Указанное обстоятельство может быть использовано при численных расчетах для определения положения точек отрыва границы каверны.

Сходимость описанной выше процедуры определения координат точек границы каверны и функции $\gamma(x)$ методом последовательных приближений существенно зависит от того, насколько удачно задана форма пробной

границы каверны, особенно в окрестности точек отрыва ее от поверхности тела. При принятии одних только приведенных выше сравнительно слабых ограничений, накладываемых на форму меридионального сечения пробной границы каверны, сходимость не будет гарантирована. Однако, как показывает практика расчетов, его форму можно откорректировать таким образом, что процесс последовательных приближений будет всегда сходящимся. Для этого воспользуемся методом расчета плоского кавитационного обтекания тела [3], который будем рассматривать как формальный приближенный прием определения координат границы каверны по заданному распределению скорости на контуре продольного сечения тела. При этом в расчетных формулах будем использовать распределение скорости, соответствующее осесимметричному обтеканию составного тела с пробной границей каверны, подчиненной только упомянутым выше слабым ограничениям (при определении $\gamma(x)$ эта функция на границе каверны, естественно, не считается величиной постоянной). В результате будет найдена разность значений углов между касательной к контуру и осью симметрии течения для откорректированной и исходной форм пробной границы каверны. Использование таким образом откорректированных границ каверны в первом приближении обеспечивает сходимость последовательных приближений.

Эффективность указанного приема корректировки формы меридионального сечения каверны обусловлена, по-видимому, двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что уравнения плоского и осесимметричного кавитационных течений идентичны «в малом», вследствие чего уравнения меридионального сечения осесимметричной каверны и каверны, плоской вблизи точки отрыва от тела, описываются одинаковыми уравнениями типа (4) [2]. Во-вторых, несмотря на то что используются формально уравнения плоского течения, эффект пространственности в значительной степени учитывается, так как при расчетах в качестве исходных данных берется распределение скоростей, соответствующее осесимметричному обтеканию составного тела.

Из рассмотрения уравнений работы [3] легко установить, что вблизи точек отрыва откорректированная форма меридионального сечения каверны соответствует аппроксимации (4).

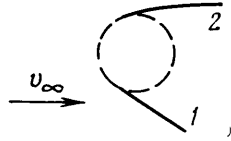
Если при корректировке формы каверны постоянную γ_0 определять не из условия замкнутости каверны, как это сделано в [3], а из условия равенства углов наклона касательных к меридиональным сечениям пробной и откорректированной границ каверны в точках их замыкания на фиктивное тело, то аппроксимация (4) будет иметь место в окрестности этих точек.

В силу допущений, принятых в [3], рассмотренная выше методика корректировки формы границы каверны дает тем лучшие результаты, чем плавнее изменение наклона касательной к меридиональному сечению границы каверны вблизи точек отрыва. Для тел с фиксированными точками отрыва каверны, которые, как правило, совпадают с точками разрыва касательной к контуру меридионального сечения тела, наклон касательной к оси симметрии течения в окрестности этих точек может меняться очень резко. Однако связанные с этим обстоятельством затруднения можно легко обойти.

С этой целью контур меридионального сечения вблизи точки схода струй следует дополнить куском кривой малой длины, касательная к одному концу которой совпадала бы с касательной к телу, а касательная на другом конце составляла бы малый угол со скоростью набегающего потока. Для иллюстрации на фиг. 2 изображена часть меридионального сечения кругового конуса с углом при вершине более 180° , обозначенная цифрой 1; пунктиром изображена дополнительная кривая, в качестве которой в дан-

ном случае взята дуга окружности, а цифрой 2 обозначена часть пробной границы каверны.

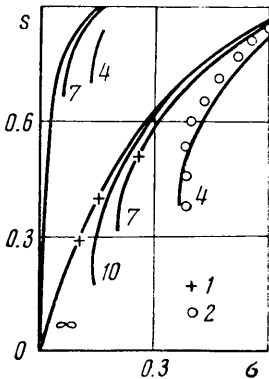
Если радиус окружности взять достаточно малым, то картина течения в целом будет близка к той, которая соответствует отрыву каверны



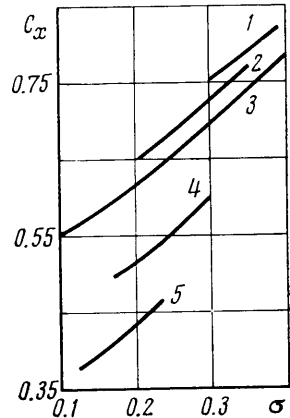
Фиг. 2

с острой кромки основания конуса. Искажения будут наблюдаться только в малой окрестности точек отрыва каверны, равной по порядку величины радиуса дополнительной окружности.

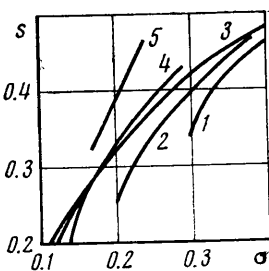
Ниже приведены некоторые результаты расчетов кавитационного обтекания шара, эллипсоида вращения с отношением малой оси к большой, равным 0,3, и кругового конуса с углом при вершине, равным 90°. Течение в хвосте каверны схематизировалось путем замыкания границы каверны на диск.



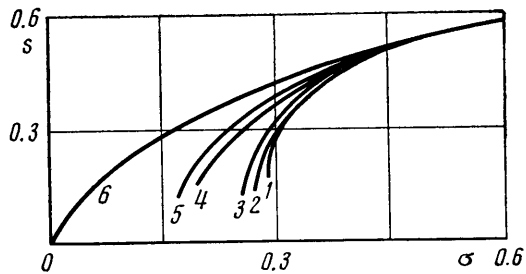
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

На фиг. 3 приведены зависимости от числа кавитации σ отношения S максимальных площадей поперечного сечения шара и эллипсоида к максимальной площади поперечного сечения каверны для условий течения в круглой цилиндрической трубе. При этом варьировалось отношение H диаметра трубы к максимальным диаметрам

указанных тел. Группа кривых, расположенных в левой части фигуры, относится к эллипсоиду, а в правой — к шару (возле кривых на фиг. 3 проставлены соответствующие им значения H). На кривых для пара экспериментальные данные [4] обозначены цифрой 1, а расчетные значения [5] — цифрой 2. Некоторое отличие последних от приведенных кривых объясняется лишь разницей в схематизации течения в хвосте каверны (в [5] было принято замыкание границы каверны на шар).

На фиг. 4 приведены кривые для конуса, находящегося в круглой конической трубе, смыкающейся по обоим концам с бесконечными цилиндрическими трубами, для двух значений отношения площадей последних — $n=2.5$ и 4.3 , которые в случае сужающегося течения (конфузор) характеризуют степень поджатия потока, а в случае расширяющегося — степень расширения. Угол между образующей конуса и осью симметрии трубы принят равным $\pm 4^\circ$ (знак минус соответствует диффузору, а знак плюс — конфузору), а коэффициент загрузки сечения $K=0.0015$. Коэффициент загрузки вычислялся для сечения трубы, совпадающего с плоскостью основания конуса. Для условий течения в этом же сечении вычислялись и числа кавитации σ . На фиг. 4 линией 1 изображены зависимости, относящиеся к $n=4.3$, $\alpha=4^\circ$; линией 2 — $n=2.5$, $\alpha=4^\circ$; линией 3 — $n=1$ (цилиндрическая труба); линией 4 — $n=2.5$, $\alpha=-4^\circ$; линией 5 — $n=4.3$, $\alpha=-4^\circ$.

На фиг. 5 приведены зависимости от числа кавитации коэффициента сопротивления конуса C_x для тех же условий его обтекания.

Аналогичные расчеты были проведены также для реальной кавитационной трубы, у которой $n=11$, а длина рабочего участка равна 5.5 калибра. На фиг. 6 приведены кривые $S(\sigma, k, \chi)$ для того же конуса в этой трубе (χ обозначает расстояние от его основания до конфузора в калибрах трубы). Кривая 1 на фиг. 6 соответствует $k=0.02$, $\chi=0.75$; кривая 2 — 0.02 и 1.75, кривая 3 — 0.02 и 2.75, кривая 4 — 0.01 и 0.75, кривая 5 — 0.01 и 2.75, 6 — неограниченному потоку.

Коэффициент $C_x(\sigma)$ для тел с фиксированной точкой схода практически не зависит от k и χ , а для тел с плавным сходом струй изменяется не сильнее, чем в цилиндрических трубах [5].

Поступила 4 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.
2. Амромин Э. Л., Иванов А. Н. Осесимметричное обтекание тел в режиме развитой кавитации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
3. Иванов А. Н. Симметричное кавитационное обтекание удлиненного плоского контура. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 3.
4. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М., «Мир», 1974.
5. Brennen C. A numerical solution of axisymmetric cavity flows. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, pt 4.