

О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

О. М. КИСЕЛЕВ, Э. Ф. РАПОПОРТ

(Казань)

Предлагается итерационный метод решения некоторого класса нелинейных плоских струйных задач статической гидроупругости. Доказана сходимость простых итераций. В качестве примера решена задача о симметричном обтекании упругой пластины по схеме Кирхгофа.

1. В плоскости $z=x+iy$ рассматривается установившееся потенциальное течение несжимаемой жидкости, ограниченное твердым полигоном с концами в точках A и C , упругой тонкой пластиной CB , заземленной в точке C , и свободной поверхностью BA , вдоль которой модуль скорости V сохраняет постоянное значение V_0 . Течение может содержать гидродинамические особенности. На фиг. 1 изображена одна из возможных схем течения. Пластина, составляющая в точке C угол $\pi\gamma$ с твердой стенкой, отделяет движущуюся жидкость от зоны с постоянным давлением p_0 , равным давлению на свободной поверхности.

Требуется определить форму, которую принимает пластина под действием сил давления, и усилия в ней.

Предположим, что справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява и что срединная поверхность пластины не подвергается растяжению (сжатию) при деформации. При этом с помощью закона Гука получается соотношение [1]

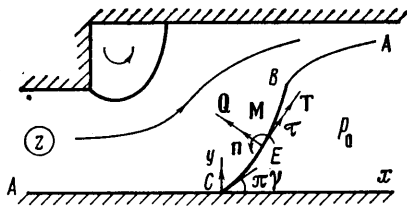
$$(1.1) \quad |M| = D |R^{-1}|$$

Здесь M — изгибающий момент, R — радиус кривизны срединной поверхности, D — жесткость пластины при изгибе.

Обычно при решении задач статической гидроупругости используются дополнительные упрощающие предположения, позволяющие в той или иной мере линеаризовать задачу. В настоящей работе сформулированная задача исследуется в точной нелинейной постановке. Доказывается ее однозначная разрешимость и дается метод сходящихся последовательных приближений.

2. Пусть s — дуговая абсцисса точек кривой CB , отсчитываемая от точки C ($0 \leq s \leq L$), $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрические уравнения кривой, $\tau = \tau(s)$ — орт касательной, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ — орт нормали, получаемый поворотом τ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. При $R > 0$ центр кривизны лежит на положительной полупрямой нормали, а при $R < 0$ — на отрицательной.

Пусть M , T и Q — изгибающий момент, продольная и поперечная силы, действующие на дугу CE в нормальном сечении $E(s)$. На фиг. 1 изображены векторы M , T и Q , соответствующие положительным значениям M , T и Q . При таком правиле выбора знаков модули в (1.1) можно опустить.



Фиг. 1

Из уравнений статики для дуги BE найдем

$$(2.1) \quad M' = x'P + y'N, \quad P = \int_s^L px' ds, \quad N = \int_s^L py' ds$$

Здесь p — давление жидкости, штрихами обозначаются производные по s . Дифференцируя (2.1) дважды по s и исключая из полученных уравнений P и N , с учетом равенств $R^{-1} = x'y'' - y'x''$, $R^{-2} = (x'')^2 + (y'')^2$, $R^{-3} = x''y''' - y''x'''$ получим

$$(2.2) \quad M''' + \frac{R'}{R}M'' + \frac{1}{R^2}M' = -p' - (p-p_0)\frac{R'}{R}$$

Аналогично будем иметь

$$(2.3) \quad Q = -M', \quad T = (M'' + p - p_0)R$$

Из (1.4) и (2.2) с помощью интегрирования найдем

$$(2.4) \quad D \left[-R \frac{d}{ds}(R'R^{-2}) + \frac{1}{2}R^{-2} \right] = (p_0 - p)R + C_1$$

$$(2.5) \quad R(M'' + p - p_0) + \frac{1}{2}DR^{-2} = C_1 \quad (C_1 = \text{const})$$

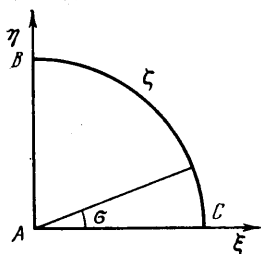
Учитывая, что в точке $B(s=L)$ $T=Q=M=0$, из (2.3) — (2.5) получим

$$\beta''' + \frac{1}{2}(\beta')^3 = \frac{1}{D}(p_0 - p), \quad M = D\beta'$$

$$(2.6) \quad T = -\frac{1}{2}D(\beta')^2, \quad Q = -D\beta'', \quad \beta' = \beta'' = 0 \quad (s=L)$$

где $\beta = \beta(s)$ — угол наклона вектора τ к оси x .

3. Пусть в плоскости вспомогательного комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ области течения соответствует область $|\zeta| \leq 1$, $0 \leq \sigma = \arg \zeta \leq \pi/2$, причем точкам A, C, B соответствуют точки $\zeta = 0, 1, i$ (фиг. 2). Область $|\zeta| < 1$, $\xi > 0$, $\eta > 0$ обозначим через G .



Производная от комплексного потенциала $dw/d\zeta$ в плоскости ζ легко строится по нулям и полюсам [2] (их число и кратность определяются схемой течения, а положение в замкнутой области G считается известным, причем при $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 < \sigma < \pi/2$ критические точки и гидродинамические особенности отсутствуют)

Фиг. 2

$$(3.1) \quad dw/d\zeta = \varphi_0 F(\zeta)$$

Здесь φ_0 — приращение потенциала скорости φ вдоль дуги CB , $F(\zeta)$ — известная функция. При этом на CB

$$(3.2) \quad d\varphi/d\sigma = \varphi_0 f, \quad f = f(\sigma) = |F(e^{i\sigma})|$$

Функцию Жуковского $\chi(\zeta)$ представим в виде суммы

$$\chi(\zeta) = \ln \left(V_0 \frac{dz}{dw} \right) = \chi_0(\zeta) + \omega(\zeta) = r + i\theta$$

Здесь $r = \ln V_0/V$, θ — угол наклона скорости к оси x , $\chi_0(\zeta)$ — функция Жуковского для течения жидкости по заданной схеме, но при условии, что упругая пластина заменена жестким прямолинейным отрезком, составля-

ющим с твердой стенкой угол $\pi\gamma$. Считая, что образы вершин полигона в плоскости ζ заданы, зная углы наклона звеньев полигона, а также характер и положение особых точек функции $\chi_0(\zeta)$, последнюю легко построить в явном виде (в работе [3], где исследуются струйные течения, ограниченные абсолютно гибкими пленками, приведены выражения $F(\zeta)$ и $\chi_0(\zeta)$ для течений по рассматриваемой схеме).

Функция $\omega(\zeta)$ регулярна в G , непрерывна в \bar{G} и удовлетворяет условиям

$$(3.3) \quad \text{Im } \omega(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad \text{Re } \omega(i\eta) = 0 \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \text{Re } \omega(e^{i\sigma}), \quad \mu = \text{Im } \omega(e^{i\sigma}), \quad \dot{\mu} = d\mu / d\sigma, \quad r_0 = \text{Re } \chi_0(e^{i\sigma})$$

Согласно (3.1), (3.2) и уравнению Бернулли на контуре CB

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \theta = \pi\gamma + \mu = \beta, \quad r = r_0 + \lambda, \quad \frac{ds}{d\sigma} = \varphi_0 V_0^{-1} f \exp(r_0 + \lambda) \\ p_0 - p = \frac{1}{2} \rho V_0^2 [\exp(-2r_0 - 2\lambda) - 1] \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность жидкости.

Используя (3.4) и (2.6), получим

$$(3.5) \quad \begin{aligned} v = -e^\lambda \int_{\pi/2}^\sigma h e^\lambda \left\{ \int_{\pi/2}^\sigma \left[\varepsilon (h e^\lambda - g e^{-\lambda}) + \frac{1}{2} v^3 h e^{-2\lambda} \right] d\sigma \right\} d\sigma \\ v = \dot{\mu} h^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{\rho \varphi_0^3}{2 D V_0}, \quad h = f e^{r_0}, \quad g = f e^{-r_0}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Таким образом, искомая функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять крайевым условиям (3.3), (3.5). Очевидно, при $\varepsilon = 0$ функция $\omega(\zeta) = 0$ удовлетворяет им.

4. С учетом (3.3) функцию $\omega(\zeta)$ можно выразить через $\dot{\mu}(\sigma)$ формулой

$$(4.1) \quad \omega(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \dot{\mu}(t) \ln \frac{1 - 2\zeta \cos t + \zeta^2}{1 + 2\zeta \cos t + \zeta^2} dt$$

Из (4.1) следует:

$$(4.2) \quad \lambda(\sigma) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \dot{\mu}(t) \ln \left| \frac{\cos \sigma - \cos t}{\cos \sigma + \cos t} \right| dt$$

Пусть $\kappa = \kappa(\sigma)$ — вещественная функция, принадлежащая пространству C функций, непрерывных на интервале $[0, \pi/2]$. Введем операторы B, A, K

$$(4.3) \quad B\kappa = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(t) \ln \left| \frac{\cos \sigma - \cos t}{\cos \sigma + \cos t} \right| dt$$

$$(4.4) \quad A\kappa = -u \int_{\pi/2}^\sigma h u J(\sigma) d\sigma, \quad u = \exp(Bh\kappa)$$

$$J(\sigma) = \int_{\pi/2}^\sigma \left[\varepsilon \left(hu - \frac{g}{u} \right) + \frac{1}{2} \kappa^3 \frac{h}{u^2} \right] d\sigma$$

$$(4.5) \quad K\kappa = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(t) \ln \frac{1-2\zeta \cos t + \zeta^2}{1+2\zeta \cos t + \zeta^2} dt$$

Из соотношений (3.5), (4.2) – (4.4) следует, что функция v является решением операторного уравнения $v = Av$.

Справедливо и обратное утверждение. Если функция $v = v(\sigma) \in C$ удовлетворяет уравнению $v = Av$, то функция $\omega(\zeta) = Kv h$, где K определено (4.5), дает решение краевой задачи (3.3), (3.5). Действительно, функция $\omega(\zeta)$ регулярна в G , непрерывна в \bar{G} , удовлетворяет условиям (3.3) и $\dot{\mu} = v h$. Из этого соотношения и уравнения $v = Av$ следует, что условия (3.5) также выполняются.

5. Можно показать [3], что оператор B переводит пространство C в себя, причем $\|B\| = b = 1.16624$. Для простоты исследования ограничимся случаем $0 \leq \gamma \leq 1/2$, при этом $h, g \in C$.

Пусть $S(q)$ – множество функций $\kappa \in C$, удовлетворяющих условию $\|\kappa\| \leq q$. При $\kappa \in S(q)$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \|A\kappa\| &\leq d e^{3aq} (\varepsilon + 1/2 q^3 e^{aq}) \\ a &= b \|h\|, \quad d = 1/\pi^2 \|h\| \max(\|h\|, \|g\|) \end{aligned}$$

Оператор A имеет производную Фреше $A'(\kappa)$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} A'(\kappa) \kappa_1 &= p_1 A \kappa - u \int_{\pi/2}^{\sigma} h u p_1 J(\sigma) d\sigma - u \int_{\pi/2}^{\sigma} h u \times \\ &\times \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon \left(h u + \frac{g}{u} \right) p_1 + \kappa^2 \frac{h}{u^2} \left(\frac{3}{2} \kappa_1 - \kappa p_1 \right) \right] d\sigma \right\} d\sigma, \quad p_1 = B h \kappa_1 \end{aligned}$$

При $\kappa \in S(q)$ из (5.2) следует:

$$(5.3) \quad \|A'(\kappa)\| \leq d e^{3aq} [4\varepsilon a + q^2 e^{aq} (2aq + 3/2)]$$

Согласно (5.1), (5.3) оператор A преобразует шар $S(q)$ в себя и является на этом шаре оператором сжатия [4], если выполняются условия

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq F_1(q) = \frac{1}{d} q e^{-3aq} - \frac{1}{2} q^3 e^{aq} \\ \varepsilon &< F_2(q) = \frac{1}{4ad} e^{-3aq} - \frac{1}{2} q^3 e^{aq} - \frac{3}{8a} q^2 e^{aq} \end{aligned}$$

Пусть q_i – положительный корень уравнения $F_i(q) = 0$ ($i=1, 2$)

$$q_0 = \min(q_1, q_2), \quad F_0(q) = \min(F_1(q), F_2(q))$$

функция $\varepsilon = F_0(q)$ положительна на интервале $0 < q < q_0$ и имеет на нем единственный максимум, равный ε_0 . Каждая прямая $\varepsilon = \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ пересекает кривую $\varepsilon = F_0(q)$ в двух точках с абсциссами, равными соответственно $q' = q'(\varepsilon_1)$ и $q'' = q''(\varepsilon_1)$ ($0 < q' < q'' < q_0$). На основе принципа сжатых отображений формулируется следующая теорема.

Теорема 1. При $|\gamma| \leq 1/2$ и $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ в шаре $S(q')$ существует решение уравнения $v = Av$. В шаре $S(q'')$ это решение единственно. Решение может быть найдено методом простых итераций по схеме

$$(5.4) \quad v^{(n)} = A v^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

при любом начальном приближении $v^{(0)} \in S(q')$. Оценка погрешности n -го

приближения при этом дается формулой

$$(5.5) \quad \|v - v^{(n)}\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|v^{(0)} - Av^{(0)}\|$$

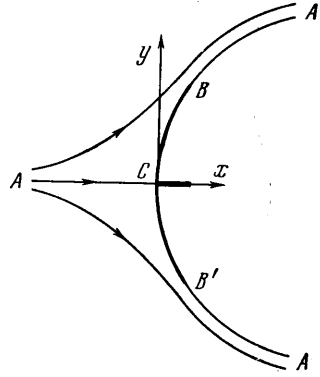
$$\alpha = de^{3aq'} [4\epsilon a + q'^2 e^{aq'} (2aq' + 3/2)]$$

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения $v = Av$, причем $v \in C$. Тогда, как было показано выше, решение краевой задачи (3.3), (3.5) дается формулой $\omega = Khv$.

Пусть выполняются условия теоремы 1 и $v^{(0)} \in S(q')$. Введем обозначения

$$(5.6) \quad \omega^{(n)}(\xi) = Khv^{(n)}, \quad \lambda^{(n)} = \text{Re } \omega^{(n)}(e^{i\sigma})$$

$$\mu^{(n)} = \text{Im } \omega^{(n)}(e^{i\sigma}), \quad \dot{\mu}^{(n)} = \frac{d\mu^{(n)}}{d\sigma}$$



Фиг. 3

Функция $\omega^{(n)}(\xi)$ регулярна в G , непрерывна в \bar{G} и удовлетворяет условиям

$$\text{Im } \omega^{(n)}(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad \dot{\mu}^{(n)} = hv^{(n)}, \quad \text{Re } \omega^{(n)}(i\eta) = 0 \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

Очевидно, при $\xi \in \bar{G}$

$$\max |\omega(\xi) - \omega^{(n)}(\xi)| \leq \{ \|\lambda - \lambda^{(n)}\|^2 + \|\mu - \mu^{(n)}\|^2 \}^{1/2}$$

Учитывая, что

$$\lambda = Bhv, \quad \lambda^{(n)} = Bhv^{(n)}, \quad \mu = \int_0^\sigma hv \, d\sigma, \quad \mu^{(n)} = \int_0^\sigma hv^{(n)} \, d\sigma$$

с помощью (5.5) получим

$$(5.7) \quad \max |\omega(\xi) - \omega^{(n)}(\xi)| \leq \frac{\alpha^n \|h\|}{1-\alpha} \|v^{(0)} - Av^{(0)}\| \left(b^2 + \frac{\pi^2}{4} \right)^{1/2} \quad (\xi \in \bar{G})$$

Обозначим через $M(q)$ класс функций $\omega(\xi)$, аналитических в G , непрерывных в \bar{G} и таких, что $\|h\dot{\mu}\| \leq q$. Пользуясь полученными результатами, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. При $|\gamma| \leq 1/2$ и $\epsilon < \epsilon_1 < \epsilon_0$ решение краевой задачи (3.3), (3.5) существует в классе $M(q')$, причем в классе $M(q'')$ это решение единственно. Решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам (5.4), (5.6) при любом $v^{(0)} \in S(q')$. При этом оценка погрешности n -го приближения дается формулой (5.7).

Зная $dw/d\zeta$ и $\chi(\zeta)$, можно определить любые геометрические и динамические характеристики потока. В частности, из (2.6) и (3.4) получают формулы, характеризующие усилия, возникающие в пластине

$$c_M = \frac{2M}{\rho V_0^2 L^2} = \frac{ve^{-\lambda}}{\epsilon I^2}, \quad c_T = \frac{2T}{\rho V_0^2 L} = -\frac{ve^{-2\lambda}}{2\epsilon I}$$

$$c_Q = \frac{2Q}{\rho V_0^2 L} = \frac{1}{I} \int_{\pi/2}^\sigma \left(he^\lambda - ge^{-\lambda} + \frac{v^3}{2\epsilon} he^{-2\lambda} \right) d\sigma$$

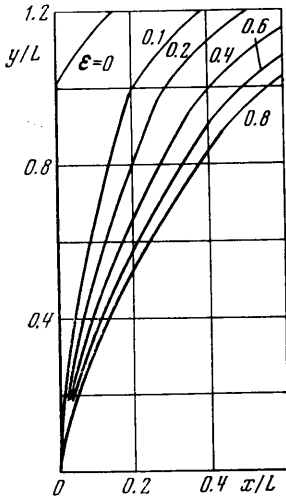
$$I = LV_0 \varphi_0^{-1} = \int_0^{\pi/2} he^\lambda d\sigma, \quad t = \frac{S}{L} = \left(\int_0^\sigma he^\lambda d\sigma \right) \left(\int_0^{\pi/2} he^\lambda d\sigma \right)^{-1}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ величины ν и λ имеют порядок ε . В пределе при $\varepsilon = 0$ получим формулы

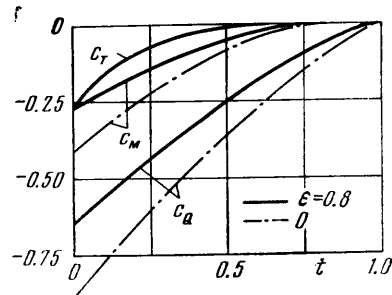
$$c_M = - \int_{\pi/2}^{\sigma} h \left[\int_{\pi/2}^{\sigma} (h-g) d\sigma \right] d\sigma \left(\int_0^{\pi/2} h d\sigma \right)^{-2}, \quad c_T = 0$$

$$c_Q = \int_{\pi/2}^{\sigma} (h-g) d\sigma \left(\int_0^{\pi/2} h d\sigma \right)^{-1}, \quad t = \left(\int_0^{\sigma} h d\sigma \right) \left(\int_0^{\pi/2} h d\sigma \right)^{-1}$$

которые дают точные значения c_M , c_Q , c_T для случая обтекания жесткого прямолинейного отрезка по схеме Кирхгофа.



Фиг. 4



Фиг. 5

6. Практика расчетов показала, что процесс последовательных приближений сходится во много раз быстрее, если вместо схемы (5.4) использовать схему

$$(6.1) \quad \nu^{(n)} = \frac{1}{2} \nu^{(n-1)} + \frac{1}{2} A \nu^{(n-1)}, \quad n=1, 2, \dots$$

Теоремы 1 и 2 при этом сохраняют свою силу, только в оценки (5.5) и (5.7) вместо α нужно подставить $1/2 (1+\alpha)$.

Функция $\omega(\zeta)$ имеет разложение вида

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \zeta^{2k-1}$$

где a_{2k-1} — вещественные коэффициенты. Поэтому решение уравнения (4.6) по схеме (6.1) эквивалентно нахождению последовательности коэффициентов a_{2k-1} по формулам

$$(6.2) \quad a_{2k-1}^{(n+1)} = 1/2 a_{2k-1}^{(n)} + 1/2 b_{2k-1}^{(n)}$$

$$b_{2k-1}^{(n)} = \frac{4}{\pi(2k-1)} \int_0^{\pi/2} h \varphi^{(n)} \cos(2k-1) \sigma d\sigma \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\varphi^{(n)} = -e^{\lambda^{(n)}} \int_{\pi/2}^{\sigma} h e^{\lambda^{(n)}} \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} [e(h e^{\lambda^{(n)}} - g e^{-\lambda^{(n)}}) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} (v^{(n)})^3 h e^{-2\lambda^{(n)}} \Big] d\sigma \Big\} d\sigma$$

$$\lambda^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^{(n)} \cos(2k-1)\sigma$$

$$\dot{\mu}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) a_{2k-1}^{(n)} \cos(2k-1)\sigma, \quad v^{(n)} = \dot{\mu}^{(n)} h^{-1}$$

В нулевом приближении естественно принять $a_{2k-1}^{(0)} = 0$ ($k=1, 2, \dots$).

Формулы (6.2) были положены в основу расчета симметричного кавитационного обтекания упругой пластины по схеме Кирхгофа (фиг. 3). Для этого случая

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} (1-\zeta^4) \zeta^{-3}, \quad \chi_0(\zeta) = i\pi - \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

$$f = \sin 2\sigma, \quad r_0 = \ln \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2}, \quad h = 4 \cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma}{2}, \quad g = 4 \cos \sigma \sin^2 \frac{\sigma}{2}$$

Вычислялось 14 коэффициентов a_{2k-1} ($1 \leq k \leq 14$) с точностью 10^{-4} . Ниже приведены значения a_{2k-1} с обратным знаком для $\varepsilon = 0.3$.

k	n=1	2	3	4	5	6	7
1	1.0463	0.5104	0.4990	0.4998	0.4992	0.4992	0.4993
2	0.2539	0.1158	0.1101	0.1086	0.1073	0.1076	0.1076
3	0.0863	0.0335	0.0303	0.0292	0.0287	0.0286	0.0285
4	0.0320	0.0093	0.0083	0.0081	0.0079	0.0079	0.0079
5	0.0143	0.0028	0.0030	0.0032	0.0032	0.0033	0.0033
6	0.0076	0.0009	0.0014	0.0017	0.0018	0.0019	0.0019
7	0.0015	0.0002	0.0007	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011
8	0.0009	0.0000	0.0004	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008
9	0.0020	-0.0000	0.0002	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005
10	0.0014	-0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
11	0.0010	-0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
12	0.0008	-0.0000	0.0000	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
13	0.0006	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
14	0.0005	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Значения коэффициентов c_M, c_Q, c_T в точке $C(t=0)$ и значения параметра $\delta = \rho L^3 V_0^3 (2D)^{-1}$ для ряда значений ε даны ниже. Здесь же приведены значения коэффициента сопротивления c_x , вычисленные по формуле

$$c_x = \int_0^{\pi/2} (h e^\lambda - g e^{-\lambda}) \cos \mu \, d\sigma \left(\int_0^{\pi/2} h e^\lambda \, d\sigma \right)^{-1}$$

для контроля точности (должно быть $c_x = -c_Q$ при $t=0$).

ε	δ	c_M	c_T	c_Q	c_x
0	0	-0.4003	0	-0.8798	0.8798
0.10	2.2060	-0.3520	-0.1366	-0.8109	0.8108
0.20	3.3156	-0.3335	-0.1844	-0.7700	0.7689
0.40	4.8192	-0.3100	-0.2316	-0.7128	0.7116
0.60	5.9448	-0.2920	-0.2535	-0.6736	0.6717
0.80	6.7656	-0.2719	-0.2743	-0.6249	0.6359

На фиг. 4 изображена форма упругой пластины и свободной поверхности для шести значений ϵ . На фиг. 5 показана зависимость c_m , c_T и c_Q от $t=s/L$.

Авторы признательны Г. Ю. Степанову, под влиянием которого была выполнена настоящая работа.

Поступила 21 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. Киселев О. М., Федяев В. Л. О струйном течении жидкости при наличии гибкого ограждения. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 11, Изд-во Казанск. ун-та, 1974.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Ругицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.