

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЭЛАСТИЧНЫХ ТРУБАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

В. Е. НАКОРЯКОВ, В. В. СОБОЛЕВ, И. Р. ШРЕЙБЕР, Б. Я. ШТИВЕЛЬМАН

(Новосибирск)

В работе построено приближение Кортвега – де Вриза (КДВ) для возмущений, распространяющихся в эластичных трубах, заполненных жидкостью. На основе построенного приближения и полученного уравнения для возмущений скорости конечной амплитуды проведен анализ явления гидравлического удара в постановке Жуковского, отдельно рассмотрен гидравлический удар в системах с предварительным продольным натяжением. Основное внимание при изучении возмущений уделено структуре и эволюции сигнала в гидравлической линии. Учет инерционных свойств трубы в указанном приближении позволил указать принципиально новые эффекты, существенные для прикладных задач распространения возмущений в эластичных гидрелиниях. В частности, показано, что начальный сигнал может в таких линиях усиливаться в 2 раза, перераспределяя свою интенсивность по частотам. Установлено, что в гидравлических линиях с предварительным натяжением возможно возникновение осциллирующего предвестника.

Начиная с [1], явление гидравлического удара исследовалось во многих работах, например в [2]. Основное внимание в этих работах уделено скорости распространения гидравлического удара и его интенсивности.

Исходная система уравнений Жуковского после выполненных им упрощений не содержит механизма, препятствующего укручению профиля волны, и, таким образом, в рамках этой теории отсутствует возможность образования стационарной ударной волны.

Кроме того, теория гидравлического удара и распространения возмущений в эластичных трубах Жуковского предполагает также отсутствие в системе предварительного продольного натяжения.

Учет инерционных свойств оболочки и предварительного продольного натяжения в теории гидравлического удара и распространения возмущений в эластичных трубах приводит к выводу, что структура, скорость и амплитуда волн существенно зависят от характеристик начального возмущения и для мощных сигналов в достаточно длинных трубах могут значительно отличаться от предсказываемых теориями гидравлического удара.

1. Следуя Жуковскому, рассмотрим первоначально равномерное со скоростью u_0 движение воды в трубе, которое останавливается быстрым закрытием задвижки. Будем считать, что существенным для гидравлического удара является сжимаемость воды и расширение стенок трубы. Примем также, что изменение скорости, вносимое задвижкой, так же как и начальное течение, осесимметрично.

Уравнение движения для массы жидкости в трубе имеет вид

$$(1.1) \quad \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F$$

$$(1.2) \quad \rho = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho' r dr, \quad p = \frac{2}{R^2} \int_0^R p r dr$$

$$(1.3) \quad u = \left[\int_0^R u' \rho' r dr \right] \left[\int_0^R \rho' r dr \right]^{-1}$$

Здесь ρ , p — средние по сечению плотность и давление жидкости; u — скорость центра тяжести рассматриваемой массы жидкости между двумя близкими сечениями; ρ' , p' , u' — текущие значения плотности, давления и скорости; R — переменный радиус трубы; F — сила трения. При выводе уравнения (1.1) предполагается также, что разность $p-p(R)$ в любой точке по сечению равна нулю — предположение об одномерности движения. Уравнение (1.1) следует из уравнений Навье — Стокса после соответствующего усреднения по сечению по правилам (1.2), (1.3) или после непосредственной записи второго закона Ньютона для центра тяжести массы жидкости, заключенного между двумя близкими сечениями [1].

Используя в уравнении неразрывности соотношения (1.2), запишем уравнение неразрывности для осредненного течения в трубе

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho R^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho R^2 u) = 0$$

В дальнейшем в уравнении (1.1) силами трения будем пренебрегать.

Уравнения (1.1) и (1.4) дополним соотношением, которое устанавливает связь между возмущением давления в жидкости и возмущением плотности,

$$(1.5) \quad p - p_0 = c_1^2 (\rho - \rho_0)$$

Здесь c_1 — скорость звука в жидкости, будем считать ее постоянной, не зависящей от Δp .

Запишем также связь между возмущением давления в жидкости и изменением радиуса трубы — второй закон Ньютона для эластичной трубы, заполненной жидкостью,

$$(1.6) \quad p - p_0 = \frac{Eh}{R_0 R} (R - R_0) + \rho_1 h \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}$$

Здесь E , h , ρ_1 — модуль упругости, толщина стенки и плотность материала стенки.

Уравнение (1.4) эквивалентно уравнению для безразмерной плотности $\rho^+ = \rho / \rho_0$ и радиуса трубы $R^+ = R / R_0$, записанному в виде

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\ln \rho^+ + 2 \ln R^+) + u \frac{\partial}{\partial x}(\ln \rho^+ + 2 \ln R^+) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Учитывая принятую точность, запишем исходную систему уравнений для гидравлического удара в виде

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} + \frac{2 \Delta R}{R_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) - \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 \right) \right] + \\ & + u \frac{\partial}{\partial x} \left[\Delta \rho / \rho_0 + 2 \frac{\Delta R}{R_0} \right] + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ & \Delta p = \frac{Eh}{R_0} \left[\frac{\Delta R}{R_0} - \left(\frac{\Delta R}{R_0} \right)^2 \right] - \rho_1 h R_0 \frac{\partial^2 R^+}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Здесь u — возмущение скорости.

Рассмотрим уравнение (1.6). Обычная для гидравлических линий оценка инерционного члена $\rho_1 h \partial^2 R / \partial t^2$ (отметим, в частности, что время закры-

тия задвижки $T \geq 10^{-2}$ сек) показывает, что

$$\rho_1 h \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \ll \frac{Eh}{R_0^2} (R - R_0)$$

Если теперь, следуя [1], исключить из рассмотрения инерцию стенок трубы и использовать (1.6) в виде

$$(1.9) \quad p - p_0 = \frac{Eh}{R_0 R} (R - R_0)$$

то решение исходной системы (1.8) можно найти с помощью инвариантов Римана. Так, для волн, движущихся в положительном направлении оси x , получим решение в виде

$$(1.10) \quad f(x, t) = F(x - (c + u)t)$$

Здесь $f(x, t)$ — любая искомая функция задачи u , $\Delta \rho / \rho$, $\Delta R / R$ $c = c_1 c_2 (c_1^2 + c_2^2)^{-1/2}$, c — акустическая скорость гидравлического удара (соотношение Кортевега — Жуковского), $c_2^2 = Eh / 2R_0 \rho_0$ — скорость распространения возмущения в круглой трубе, заполненной жидкостью. Гидравлическая линия оказывается в таком приближении специальной средой, скорость распространения волн в которой отличается от соответствующих скоростей в жидкости и в трубе.

Рассмотрение вопроса об изменении формы волны удара требует отказа от этого приближения. Однако более точное выражение (1.9) — так называемая простая волна Римана — через весьма малое время $T_1 \sim l / u$ ($l = cT$ — ширина переднего фронта начального возмущения) становится неоднозначным в результате хорошо известного укрупнения переднего фронта волны. Но еще до наступления этого момента теряет силу приближенное соотношение (1.9), так как величина $\rho_1 h \partial^2 R / \partial t^2$ растет вместе с ростом крутизны фронта. Это положение еще более усугубляется в случае жестких волновых фронтов, формируемых скоростными затворами ($T = 10^{-3}$ сек) современных гидравлических линий.

Здесь ситуация аналогична той, которая имеет место в других задачах нелинейной волновой динамики (см., например, [3, 4]). Накопление нелинейного укрупнения всегда приводит к «включению» на определенном этапе компенсирующих механизмов — диссипации или дисперсии.

Обратимся поэтому к исходной системе (1.8), отказавшись от упрощения (1.9). Поскольку в этом случае явный вид решения найти не удастся, задача состоит в получении отдельных приближенных уравнений для каждой из функций u , p , R .

Прежде всего введем для удобства переобозначения $\Delta \rho / \rho = \rho$

$$\Delta R / R_0 = R$$

Уравнения (1.9) могут быть представлены в виде системы Буассине-ска [3]:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2c_2^2 \frac{\partial R}{\partial x} - 4c_2^2 R \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\rho_1 h R_0}{\rho} \frac{\partial^3 R}{\partial t^2 \partial x} = 0 \\ & 2(1 + c_2^2 / c_1^2) \frac{\partial R}{\partial t} + 2(1 + c_2^2 / c_1^2) u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = \\ & = \frac{4c_2^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) R \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\rho_1 h R_0}{c_1^2 \rho} \frac{\partial^3 R}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Система (1.11) допускает решение в классе так называемых квазипростых волн [3], и для малых значений коэффициентов $\rho_1 h R_0 / c_1^2 \rho$ и не-

больших значений нелинейных членов может быть сведена с помощью формализма [3, 4] к уравнению Кортевега — де Вриза, например, для возмущения скорости, распространяющегося в одну сторону:

$$(1.12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2c_2^2}{c_1^2 + c_2^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{c^5}{c_2^4} \frac{\rho_1 h R_0}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Отметим, что для гидравлической линии из металла, рассматриваемой в работе [1], $c_1 \sim c_2 \sim c$, поэтому коэффициент при нелинейном члене $2c_2^2 / (c_1^2 + c_2^2) \sim 1$. Замена $2c_2^2 (c_1^2 + c_2^2)^{-1} u = v$ и переход к переменным $\xi = x - ct$, $t = \tau$ приводит уравнение (1.12) к каноническому виду

$$(1.13) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0$$

2. Уравнение Кортевега — де Вриза (1.13) достаточно подробно исследовалось в последнее время (см., например, [3, 4]). Характерной особенностью этого нелинейного уравнения является возможность распада его решений на «солитоны» — уединенные волны, движущиеся без изменения формы, и отстающие от них «волновые пакеты» — высокочастотные осцилляции, расплывающиеся с течением времени.

В работе [5] получено асимптотически точное (при $\tau \rightarrow \infty$) решение задачи о распаде «произвольного разрыва», взятого в качестве начального условия, которое может быть использовано при моделировании прямой волны гидравлического удара. Оказалось, что на достаточно больших временах волновой фронт представляет собой расширяющуюся область, занятую колебаниями, переходящими на переднем участке в солитоны. При этом в решении существенно используется тот факт, что в выбранном начальном условии ширина фронта равна нулю.

Для выяснения роли конечной ширины фронта, а также для изучения выхода решения на асимптотику было предпринято численное интегрирование (1.13) с начальным условием, взятым в виде «сглаженной ступеньки» по методике [6]

$$(2.1) \quad v(\xi, 0) = \begin{cases} v_0, & \xi \leq \xi_0 \\ v_0 \exp[-(\xi - \xi_0)/l^2], & \xi > \xi_0 \end{cases}$$

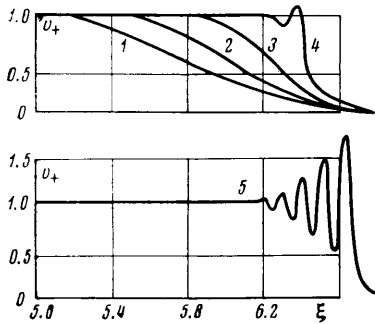
где $l = cT$ — характерная ширина фронта волны.

Оказалось (фиг. 1), что в этом случае на первоначальном волновом фронте возникают осцилляции, число и амплитуда которых с течением времени увеличиваются, так что в конце концов картина приближается к описанной в [5].

Чтобы унифицировать данные численного анализа, введем (как это было сделано в [3] для финитных сигналов) параметр подобия для нашего начального условия. Замена $v/v_0 = v_+$, $\xi/l \rightarrow \xi$, $\tau v_0/l \rightarrow \tau$ приводит (1.3) к уравнению

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_+}{\partial \tau} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial \xi} + \frac{\beta}{v_0 l^2} \frac{\partial^3 v_+}{\partial \xi^3} = 0$$

а начальное условие (2.1) — к стандартному виду — к ступеньке с единичной высотой и шириной фронта.



Фиг. 1

Будем предполагать, что решение слабо зависит от конкретного вида аппроксимации (2.1). Тогда можно утверждать, что процессы, отвечающие одинаковым значениям $\beta^* = \beta / v_0 l^2$, развиваются подобно. На фиг. 1 расчеты выполнены для $\beta^* = 10^{-4}$. Кривым 1–5 соответствуют значения $\tau = 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6$.

При анализе результатов вычислений (проведенных для различных величин l, β^*) обращает на себя внимание почти полная независимость характеристик асимптотической картины от начальной ширины фронта. Основываясь на этом обстоятельстве и используя соображения подобия, нетрудно показать, что, если у решения есть характерные масштабы с размерностями длины и скорости, то они соответственно пропорциональны $(\beta / v_0)^{1/2}$ и v_0 . Такие масштабы действительно существуют: это «характерная длина волн» — расстояние между максимумами, которое мало меняется вдоль дуга и со временем; максимальная амплитуда осцилляций U ; нелинейная добавка к скорости распространения сигнала — скорость перемещения вправо (в сопутствующей системе отсчета). Детальный анализ результатов численных экспериментов выявляет коэффициенты пропорциональности

$$(2.3) \quad \lambda = 0.1 (\beta / U_0)^{1/2}, \quad U = 2v_0, \quad v = v_0/3.$$

(связь между U и v_+ отражает известное соотношение между скоростью и амплитудой солитона). Аналитические результаты [5] и имеющиеся результаты численного интегрирования уравнения (2.2) подтверждают справедливость (2.3).

Отметим, что истинное начальное условие при гидравлическом ударе представляет собой «ступеньку», сдвинутую при начальном движении жидкости со скоростью U_0 на U_0 вниз, в отрицательную полуплоскость v . Нетрудно показать, что в этом случае (возникающем из-за того, что направления движения жидкости и волны противоположны) решение имеет тот же вид, но волна движется относительно прежнего как целое влево со скоростью u_0 . Вместе со сказанным выше это означает отставание нелинейной волны гидравлического удара от акустического решения Жуковского на $v_+/3$.

3. В предыдущем пункте рассматривалось распространение возмущения в эластичной трубе без предварительного натяжения. Однако в ряде систем оболочка гидравлической линии сделана из резиноподобного материала и имеет предварительное продольное натяжение H .

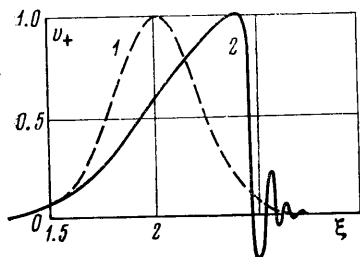
Ниже будет показано, что если величина продольного натяжения попадает в довольно широкий интервал значений, задача как и в первой части, сводится приближенно к уравнению Кортевега — де Вриза. В отличие от рассмотренного выше случая, однако, в этом уравнении коэффициент дисперсии β , монотонно убывающий с ростом натяжения H , может принимать и отрицательные значения. При этом в рассматриваемой системе должны возникать некоторые специфические явления нелинейной волновой динамики. В частности, на достаточно больших временах из основного фронта волны выделяется осциллирующий предвестник, амплитуда которого может быть соизмерима с амплитудой начального возмущения. В этих задачах сжимаемость жидкости играет второстепенную роль и для резиноподобных труб ею можно пренебречь. В этом случае уравнения (1.8) остаются неизменными, а в соотношении (1.6) необходимо дополнительно учесть предварительное продольное натяжение H .

Тогда уравнение движения элемента стенки, играющее роль уравнения состояния для системы уравнений гидравлического удара принимает вид

$$(3.1) \quad p - p_0 = \frac{Eh}{R_0 R} (R - R_0) + \rho_1 h \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{H}{2\pi R_0} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$$

Здесь ρ, h, E — плотность, толщина и модуль упругости материала стенки, R — радиус трубы, индекс 0 означает стационарное значение соответствующей величины. В (3.1) также использовано то обстоятельство, что в длинноволновом приближении ($l \gg R_0$) изменениями давления вдоль поперечного сечения можно пренебречь. Из уравнения (3.1) (в предположении $\epsilon = u/c \ll 1$) видно, что $\Delta R/R_0 \sim \Delta u/c \leq \epsilon$.

Здесь $\Delta R, \Delta u$ — амплитуды изменений соответствующих величин. Ограничимся рассмотрением случаев, когда члены со старшими производными в (3.1) имеют порядок малости ϵ^2 (этим, в частности, определяется диапазон рассматриваемых значений H). Тогда, поступая так же, как и в предыдущем пункте, получим уравнение для функции v



Фиг. 2

$$(3.2) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0, \quad \tau = t$$

$$\xi = x - ct$$

$$\beta = c^3 / 4\rho c_1^4 (\rho_1 c^2 h R_0 - H/2\pi)$$

Нетрудно видеть, что при достаточно больших значениях продольного натяжения H коэффициент $\beta < 0$. Отметим, что для металлических оболочек труб выражение для β меняет знак при предварительном натяжении $H > 10^5$ кг, что позволяет при анализе гидравлического удара в металлических трубах его не учитывать, т. е. остается справедливым рассмотрение предыдущей задачи. Однако, если оболочка сделана из резиноподобного материала, скорость распространения сигнала существенно уменьшается уже при небольших значениях предварительного натяжения H . Коэффициент дисперсии β меняет знак и может стать отрицательным. Так, для поливинилхлоридных шлангов, используемых в приемных устройствах морской сейсмозащиты, где 20% вредных шумов имеет характер гидравлического удара, значения H , при которых β меняет знак, порядка 10^2 кг и для тонких трубок латекса, моделирующих систему кровообращения, $H \sim 1$ кг. Такие натяжения возможны в условиях опытов.

Характерная эволюция сигнала в гидравлических линиях при $H/2\pi > \rho_1 c^2 h R_0$ показана на фиг. 2. Для $\beta^* = -10^{-4}$; кривым 1, 2 соответствуют значения $\tau = 0, 0.4$.

В заключение сделаем общее замечание, относящееся к обоим случаям. В рассматриваемой задаче не учтено трение и связанное с ним затухание волн. В рамках рассматриваемой одномерной теории вязкость жидкости может входить в уравнения для волны возмущения только в виде низкочастотного затухания.

Поступила 11 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. Мостков М. А. Современное состояние и дальнейшие задачи исследований гидравлического удара. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 6.
3. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
4. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны. Усп. физ. н., 1971, т. 103, вып. 2.
5. Гуревич А. В., Пугачевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2.
6. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Динамика ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1974, № 5.