МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1976

УДК 532.51

ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СТОКОВ

В. А. БОГОМОЛОВ

(Калининград)

Рассматривается нестационарное движение идеальной жидкости с постоянной плотностью в неограниченном объеме, когда дивергенция скорости отлична от нуля и задается плотностью стоков σ, зависящей от координат $\mathbf{r}$ и времени t.

Известно, что введение таких идеализированных гидродинамических объектов, как точечный вихрь, источник или сток, и изучение связанных с ними течений жидкости оказывается полезным при решении ряда конкретных гидродинамических задач [1, 2]. Исследованию движения точечных вихрей посвящено много работ, обзор наиболее ранних приведен в [3], тогда как движение свободных точечных стоков или источников не изучалось. Последнее связано с тем обстоятельством, что трудно найти соответствующий гидродинамический аналог.

Цель настоящей работы – изучить основные закономерности движения системы стоков и источников как точечных, так и распределенных для последующего приложения полученных результатов к моделированию тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, например периодических конвективных ячеек.

Основное внимание в работе уделяется изучению асимптотического поведения σ при $t\to\infty$. Получены и обсуждаются законы сохранения для системы N точечных стоков. Исследовано качественное поведение системы при больших t.

В предположении вмороженности плотности стоков в поле скорости жидкости получено эволюционное уравнение для σ при произвольном начальном распределении дивергенции скорости. В случае конечной интегральной интенсивности плотности стоков в безграничном объеме дано точное решение эволюционного уравнения при цилиндрически-симметричном начальном распределении. Изучено асимптотическое поведение этого решения при $t\to\infty$ в трех качественно отличающихся случаях. В заключение получено стационарное решение эволюционного уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим идеальную жидкость с плотностью $\rho=\mathrm{const}$, заполняющую евклидово пространство E^n $(n=1, 2, 3)$. Обозначим через $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ скорость жидкости в неподвижной декартовой системе координат, причем $\mathbf{V}\to 0$ при $|\mathbf{r}|\to\infty$. Пусть величины $\sigma=\operatorname{div}\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{V}$ определены в каждой точке $\mathbf{r}\in E^n$ и для любого $t\geqslant 0$. Тогда по теореме разложения Гельмгольца вектор скорости может быть представлен в виде

$$(1.1)\qquad \mathbf{V}=\nabla\varphi+\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \varphi=\sigma*G_n,\quad \mathbf{A}=-\boldsymbol{\omega}*G_n$$

Здесь $G_n(r)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в E^n, знак звездочки означает свертку, которая предполагается существующей.

Величину σ в дальнейшем независимо от ее знака будем называть плотностью стоков или просто стоками, когда необходимо подчеркнуть индивидуальность частиц, обладающих постоянным расходом жидкости.

Поставим следующую задачу: определить σ и $\boldsymbol{\omega}$ при $t\geqslant 0$, если известны начальные распределения

$$(1.2)\qquad \sigma(\mathbf{r}, 0)=\sigma_0(\mathbf{r}),\quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, 0)=\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r})$$

Предположим для простоты, что внешние силы отсутствуют. Тогда эволюционное уравнение для завихренности получается применением операции rot к обеим частям уравнения движения идеальной жидкости [1]

$$(1.3)\qquad \operatorname{helm}\boldsymbol{\omega}=0$$

При $\sigma\neq 0$ система уравнений (1.1)—(1.3) оказывается незамкнутой, поэтому ее необходимо дополнить эволюционным уравнением для плотности стоков.

2. Движение конечной системы точечных стоков. Рассмотрим двумерное потенциальное течение в плоскости xy. Пусть N стоков с постоянными отрицательными интенсивностями $m_i<0$, $i=1, \ldots, N$, сосредоточены в начальный момент в точках $\mathbf{r}_{0i}$, причем $\mathbf{r}_{0i}\neq\mathbf{r}_{0j}$ при $i\neq j$.

Предположим, что при $t>0$ стоки остаются точечными

$$\sigma=\sum_{i=1}^{N} m_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \tag{2.1}$$

Здесь δ — дельта-функция и $\mathbf{r}_i(t)$ — координаты стока с номером i. Предположение (2.1) подтвердится ниже.

Подставив в (1.1) $G_2=(2\pi)^{-1}\ln|\mathbf{r}|$ и σ из (2.1), получим

$$\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|^2}$$

Заменяя в последнем уравнении $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_i$ и опустив в правой части члены с $k=i$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2N$, которая позволяет определить траекторию каждого стока

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}' m_k\frac{(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|^2}, \qquad \mathbf{r}_i(0)=\mathbf{r}_{0i} \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейших формулах штрих у знака суммы означает, что $k\neq i$. Система (2.2) по структуре аналогична системе уравнений [1], описывающей движение N точечных вихрей с интенсивностями Γ_i, и также допускает соответствующие инварианты. Переобозначим величины $m_i/2\pi$ через m_i; этому в последующих формулах будет соответствовать опускание множителя $1/2\pi$.

Умножая обе части (2.2) на m_i и суммируя по всем i от 1 до N, после интегрирования получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i=\text{const} \tag{2.3}$$

Поскольку суммарная интенсивность точечных стоков отлична от нуля, то координаты центра интенсивностей системы стоков

$$\mathbf{R}_0=\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$$

не зависят от времени.

Умножив обе части (2.2) на $m_i\mathbf{r}_i$ векторно и скалярно и суммируя по i, получим соответственно

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\mathbf{r}_i\times\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right]=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{dI}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}{}' m_i m_k, \qquad I=\sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{r}_i|^2 \tag{2.5}$$

Здесь I — момент инерции системы стоков.

Уравнение (2.4) означает, что момент количества движения системы стоков равен нулю. Система (2.2), так же как система уравнений движения точечных вихрей [4], допускает запись в виде уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (q_i=\sqrt{m_i}x_i,\ p_i=\sqrt{m_i}y_i) \tag{2.6}$$

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}{}' m_jm_k \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{m_k}p_j-\sqrt{m_j}p_k}{\sqrt{m_k}q_j-\sqrt{m_j}q_k}\right]$$

Здесь q_i, p_i — обобщенные координаты и импульсы и H — гамильтониан системы стоков.

Функция H не зависит явно от времени, поэтому получаем последний инвариант $H=\mathrm{const}$.

Для выяснения особенностей решения (2.2) рассмотрим случай $N=2$. Из (2.4) следует, что стоки во время движения располагаются на прямой, проведенной через точки $\mathbf{r}_{0i}=(x_{0i},\ 0)$, $i=1,\ 2$, в которых они находились при $t=0$. Решив (2.2), получим $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_{01}-x_{02})^2+2(m_1+m_2)t}$.

Из этого выражения следует, что при $t=-(x_{01}-x_{02})^2/2(m_1+m_2)$ стоки сливаются в центре интенсивностей и вновь образовавшийся сток остается в покое.

Нахождение аналитического решения (2.2) при $N>3$, так же как и уравнений движения точечных вихрей или задачи о движении N точечных масс в небесной механике, встречается с принципиальными трудностями, так как уравнения нелинейны и число полученных интегралов движения меньше шести. Кроме того, исследование осложняется следующим обстоятельством: при слиянии стоков соответствующие им знаменатели в правой части (2.2) обращаются в нуль. Поэтому в (2.2) необходимо отбрасывать члены, соответствующие слившимся стокам.

Таким образом, (2.2) справедлива только локально, до ближайшего момента слияния стоков. Интегралы движения (2.5), $H=\mathrm{const}$ также локальны в указанном смысле, поскольку квадратичная форма $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}{}' m_im_k$ не сохраняется в целом.

Из (2.5) также следует, что при любых $|\mathbf{r}_{0i}|<\infty$ существует момент времени $t_*<\infty$, при котором все стоки, слившись, располагаются в центре интенсивностей, поскольку (2.3) справедливо при любых $t\geqslant0$. Следовательно, равновесие конечной системы N точечных стоков возможно только при $N=1$.

3. Эволюционное уравнение для плотности стоков. Пусть в жидкости распределены стоки с плотностью $\sigma(\mathbf{r},\ t)$. Всюду в дальнейших выкладках предполагается, что σ и $\boldsymbol{\omega}$ абсолютно интегрируемы на E^n для любых $t\geqslant0$ и при $|\mathbf{r}|\to\infty$ справедлива оценка $|\boldsymbol{\omega}|$, $\sigma\sim|\mathbf{r}|^{-q}$, где $q>n$.

Рассмотрим изменение интенсивности плотности стоков.

$$Q=\int_\tau \sigma(\mathbf{r},t)\,d\tau$$

в объеме τ, ограниченном поверхностью s, неподвижной относительно покоящейся на бесконечности жидкости. Предположив, что генераторы стоков в жидкости отсутствуют и изменение Q во времени происходит только за счет конвективного переноса стоков со скоростью жидкости $\mathbf{V}$, приходим к эволюционному уравнению для σ

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\operatorname{div}(\mathbf{V}\sigma)=0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) совместно с (1.1) – (1.3) образует замкнутую систему уравнений для определения завихренности и плотности стоков. Отметим, что составляя дивергенцию от векторного уравнения движения идеальной жидкости и используя (3.1), можно выразить давление p через поле скоростей, решая уравнение Пуассона

$$\Delta p=\rho\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Здесь u_i — компоненты вектора $\mathbf{V}$ по осям x_i, $i=1, 2, 3$.

В п. 2 было показано, что система отрицательных точечных стоков или точечных вихрей эволюционирует. Поэтому уравнения (1.3) и (3.1) должны описывать движение изолированных сингулярностей (точек, кривых и поверхностей).

При этом производные σ и $\boldsymbol{\omega}$ по координатам и времени не существуют в классическом смысле. Однако формально будем обращаться с величинами σ и $\boldsymbol{\omega}$ в эволюционных уравнениях как с непрерывно дифференцируемыми функциями. Будем также предполагать справедливость теоремы существования и единственности для решения эволюционных уравнений. Эти допущения подтвердятся рассмотрением следующего случая.

Пусть в плоском течении начальные распределения плотности стоков и завихренности радиально-симметричны относительно начала координат. Из вида (1.3) и (3.1) ясно, что эта симметрия сохранится и при $t>0$. Тогда $\mathbf{V}=\mathbf{V}_r+\mathbf{V}_t$, где $\mathbf{V}_r=\nabla\varphi$ и $\mathbf{V}_t=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости. Подставляя в (1.3), (3.1) $\mathbf{V}$ из (1.1) и учитывая, что $\mathbf{V}_t$ ортогонален векторам $\nabla\sigma$ и $\nabla\omega$, приходим к системе двух нелинейных интегродифференциальных сингулярных уравнений. Переходом к полярным координатам r, θ и интегрированием по углу θ уравнения упрощаются и приводятся к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\int_0^r\sigma(r',t)r'\,dr'+\omega\sigma=0\\ \frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\int_0^r\sigma(r',t)r'\,dr'+\sigma^2=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

Вводя переменные

$$u=\int_0^r\sigma r'\,dr',\qquad v=\int_0^r\omega r'\,dr',$$

сделав замену $\xi=r^2/2$ и учитывая предельное поведение ω и σ при $\xi\to\infty$, окончательно получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial\xi}=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(u^2/2)}{\partial\xi}=0 \tag{3.4}$$

Отметим, что $v(\infty, t)=\Gamma/2\pi$ и $u(\infty, t)=M/2\pi$, где Γ и M — интегральные интенсивности завихренности и плотности стоков. Решения системы квазилинейных уравнений (3.3), (3.4) определены при $t \geqslant 0$, $\xi \geqslant 0$. Система расщепляется, т. е. эволюция плотности стоков не зависит от распределения завихренности.

Известно, что решения квазилинейных уравнений могут стать разрывными даже при сколь угодно гладких начальных данных [5]. Поэтому перепишем (3.4), представляющее собой укороченное уравнение Бюргерса, когда отсутствуют диссипативные процессы, в виде закона сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_{\xi_1}^{\xi_2} u\, d\xi = -\frac{1}{2}[u^2(\xi_2, t) - u^2(\xi_1, t)] \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) имеет несчетное множество разрывных решений в целом, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям. В [5] приведен критерий допустимости, эквивалентный условию устойчивости решений законов сохранения относительно малых возмущений [6] и выделяющий единственное решение (3.5), представимое в виде [5]

$$u = (\xi - y_0(\xi, t))/t \tag{3.6}$$

Здесь $y_0(\xi, t)$ — величина, доставляющая минимум функции

$$R(y) = \Phi(y) + (\xi - y)^2/2t \left(\frac{d\Phi}{dy} = u(y, 0), y \geqslant 0\right)$$

Рассмотрим начальное распределение в виде точечного стока или источника

$$\sigma_0(r) = M_0 \delta(r)/(2\pi r)$$

Если $M_0 < 0$, то точечный сток не эволюционирует. В системе из N точечных отрицательных стоков поле скоростей в малой окрестности каждого из них не зависит от расположения остальных стоков (рассматриваются промежутки времени, когда стоки не сливаются). Поэтому при движении стоки останутся точечными, что подтверждает предположение, сделанное в п. 2.

При $M_0 > 0$

$$\sigma(\xi, t) = t^{-1} (0 < \xi/t < M_0/2\pi), \quad \sigma(\xi, t) = 0 (\xi/t > M_0/2\pi) \tag{3.7}$$

т. е. источник не остается точечным, а расплывается.

В случае произвольной начальной конфигурации в виде точки, круга, окружностей и колец, на которых распределены стоки, решение (3.5) строится из решений трех типов: постоянных, непрерывных (нетривиальных) решений или волн разрежения и разрывных переходов, или ударных волн [6]. Разрывным переходам соответствуют сингулярности в распределении σ.

Асимптотическое поведение решений (3.5) при $t \to \infty$ легко исследуется с использованием (3.6). Положим для простоты $\sigma_0(\xi)=0$ при $\xi > \xi_0 > 0$. Тогда справедливы утверждения:

а) при $M<0$ все стоки сливаются в начале координат в момент времени $t=t_*$, где $t_* \sim \xi_0/|M|$;

б) при $M>0$ часть стоков, сливаясь, может оставаться в конечной области $U \subset E^2$; остальная часть расплывается в бесконечность, причем в любой точке ξ при достаточно больших t, зависящих от ξ, $\sigma \to 0$ (не обязательно равномерно);

в) в промежуточном случае $M=0$ эволюция стоков зависит от начальной конфигурации: или осуществляется случай б), но расплывание при $\xi\to\infty$ происходит с меньшей скоростью; или все стоки остаются в конечной области $U\subset E^2$ и эволюция завершается при $t=\infty$.

Таким образом, решение (3.5) имеет не более одного, не исчезающего при $t\to\infty$ разрыва, который отвечает отрицательному точечному стоку в начале координат.

Известное общее свойство процессов, описываемых квазилинейными уравнениями гиперболического типа, состоит в их необратимости [7], и это подтверждается случаем а), так как различным начальным распределениям соответствует единственное нетривиальное решение (3.5), получающееся предельным переходом $t\to\infty$ из нестационарного.

При найденном u (3.3) представляет собой линейное уравнение в общем случае с разрывным коэффициентом, зависящим от координат и времени. Так, если в начальный момент на точечный источник наложен точечный вихрь интенсивности Γ_0, то, как следует из (3.7)

$$v=\Gamma_0\xi/M_0t \ (0<\xi/t<M_0/2\pi), \quad v=\Gamma_0/2\pi \ (\xi/t>M_0/2\pi)$$

т. е. на положительной плотности стоков вихрь расплывается.

Поведение решений (3.3) при $t\to\infty$ зависит от асимптотики (3.4). Если опять положить для простоты $\omega_0(\xi)=0$ при $\xi>\xi_1>0$, то в случае а) вихрь концентрируется в начале координат. В случаях б) и в) эволюция завихренности зависит от взаимного расположения носителей начальных распределений σ и ω.

4. Стационарное решение эволюционного уравнения для плотности стоков. Пусть течение безвихревое. Покажем, что единственным нетривиальным стационарным решением уравнения (3.1) является точечный сток, если M существует и конечно. Не ограничивая общности, рассмотрим плоское течение. Рассуждение проведем, основываясь на анализе размерностей. Поместим начало неподвижной системы координат в центре интенсивностей системы стоков.

Плотность стоков σ имеет размерность *сек*$^{-1}$ и должна зависеть от интегральной интенсивности M, имеющей размерность *см*^{2}/*сек*, и декартовых координат x, y. Следовательно, $\sigma=Mf(x, y)$ и f имеет размерность *см*$^{-2}$. Поэтому при любом действительном $\alpha>0$ должно выполняться равенство

$$f(\alpha x, \alpha y)=\alpha^{-2}f(x, y) \tag{4.1}$$

Потребуем, чтобы f была обобщенной функцией, регулярной в бесконечности. Тогда из (4.1) следует, что f регулярна всюду, за исключением, быть может, начала координат. Учитывая, что только дельта-функция и ее производные имеют в качестве носителя точку [8], и используя (4.1), получаем представление $f(x, y)=\delta(x, y)+g(x, y)$, где $g(x, y)$ – всюду регулярная функция.

В п.3 было показано, что точечный источник расплывается и в каждой точке после прихода стоков σ убывает. Следовательно, σ нигде не может быть положительной. Тогда из условия конечности M нетрудно установить, что не существует отличных от нуля функций g, удовлетворяющих (4.1). Поэтому $\sigma=M\delta(x, y)$, где $M<0$ и плотность стоков удовлетворяет эволюционному уравнению (3.1).

Если $\omega\neq0$, то аналогично показывается, что единственным отличным от нуля стационарным решением (1.3) и (3.1) является точечный вихресток.

Отметим, что для нахождения стационарного решения (1.3) при $\sigma=0$ приведенный выше анализ несправедлив, так как кроме Γ существует еще несколько отличных от нуля интегральных инвариантов распределения завихренности [4].

В заключение заметим, что основное отличие движения жидкости при наличии стоков от бездивергентного движения — необратимость первого. Это объясняется тем фактом, что понятие о жидких частицах, линиях и т. п. уже нельзя ввести в целом.

Автор благодарит А. А. Зайцева за внимание к работе, ценные советы и обсуждение результатов.

Поступила 9 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.
2. *Rosenhead L.* Formation of vortices from a surface of discontinuity. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1931, vol. 134, No. 823.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л., Гостехиздат, 1947.
4. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
6. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. н., 1959, т. 14, вып. 2.
7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.