5. *Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г.* Исследование параметров осесимметричных недорасширенных струй идеального газа. В сб. «Вычислительные методы и программирование. (Численные методы в механике сплошных сред.)», вып. 15. М., Изд-во МГУ, 1970.
6. *Тагиров Р. К.* Трансзвуковое обтекание тела вращения при истечении реактивной струи из его кормовой части. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
7. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, вып. 3.
8. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.

УДК 533.6.011.55

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО КЛИНА В НЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Э. З. АПШТЕЙН, М. М. ГИЛИНСКИЙ

(Москва)

В настоящее время в литературе имеется ряд работ, в которых рассматриваются нестационарные гиперзвуковые течения в ньютоновском приближении [1–4]. При этом, поскольку угол наклона ударной волны α_s совпадает в нулевом приближении с углом наклона тела α_b [1], то в граничных условиях на ударной волне обычно пользуются последним. Однако с таким же основанием в рамках нулевого приближения можно пользоваться значением α_s. Оба подхода равноправны и при стационарном обтекании дают близкие результаты. Для нестационарных же течений результаты могут отличаться коренным образом. Ниже будет показано, что при исследовании течения около неподвижного клина при постоянных условиях в набегающем потоке в первом случае получается стационарная картина, во втором – растущее по времени решение.

Пусть x, y – ортогональные координаты, связанные с поверхностью тела и направленные вдоль поверхности и по нормали к ней. В работе [2] путем разложения уравнений газодинамики по малому параметру $\varepsilon=\rho_\infty/\rho_s$ показано, что касательная составляющая скорости u, энтропия S и величина $m=\rho y_u'$ сохраняются в частице при нестационарном течении. Пользуясь этим, можно записать

$$y_s(x,t)=\int\limits_{u_b}^{u_s}\frac{m}{\rho}\,du=\int\limits_0^x\frac{m_s(\xi,t')}{\rho(x,y)}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big|_{t,x}u_s(\xi,t')\,d\xi \tag{1}$$

Граничные условия на ударной волне дают

$$u_s=U_\infty\cos\alpha_s(\xi,t'),\quad m_s=-\rho_0/[U_\infty\cos\alpha_s\partial\alpha_s/\partial\xi+\partial\alpha_s/\partial t'] \tag{2}$$

С учетом равенств (2) выражение (1) принимает следующий вид:

$$y_s=\int\limits_0^x[\operatorname{tg}\alpha_s\rho_0/\rho(x,y)]/[1+\operatorname{tg}\alpha_s(\partial\alpha_s/\partial t')(x-\xi)/U\cos\alpha_s]\,d\xi \tag{3}$$

В выражениях (1) – (3) t – момент времени, когда частица находится в сечении с координатой x; ξ и t' – координата точки и момент времени входа частицы в ударный слой, $\rho_0=\mathrm{const}$ – плотность в набегающем потоке, $\rho(x,y)$ – плотность газа в точке с координатами x, y в момент времени t, $U_\infty=\mathrm{const}$ – скорость набегающего потока, $\alpha_s(\xi,t')$ – угол между скоростью набегающего потока и поверхностью ударной волны.

Из (3) видно, что если вместо α_s взять угол наклона клина α_b, не зависящий от времени, то и y_s зависеть от времени не будет.

В [2] показано, что давление поперек ударного слоя постоянно. Воспользуемся формулой Ньютона

$$p_s(\xi,t')=\rho_0[U_\infty\sin\alpha_s(\xi,t')+\dot y_s(\xi,t')]^2 \tag{4}$$

Здесь $\dot{y}_s$ – скорость перемещения ударной волны. Считая течение адиабатическим, напишем

$$\rho(x, y, t) = \rho_s(\xi, t') \left[\frac{U_\infty \sin\alpha_s(\xi, t') + \dot{y}_s(\xi, t')}{U_\infty \sin\alpha_s(x, t) + \dot{y}_s(x, t)} \right]^{2/\gamma} \tag{5}$$

Подставляя это выражение в (3) и принимая во внимание, что $\rho_0/\rho_s = (\gamma-1)/(\gamma+1) = \varepsilon$, получим уравнение для y_s, которое здесь из-за громоздкости не выписывается.

В дальнейшем разобьем функции $y_s(x, t)$ и $\alpha_s(x, t)$ на две части:

$$y_s(x, t) = y_{s0}(x) + y^*(x, t), \quad \alpha_s(x, t) = \alpha_{s0}(x) + \alpha^*(x, t) \tag{6}$$

В этих выражениях $y_{s0}(x)$ и $\alpha_{s0}(x)$ – значения отхода и угла наклона ударной волны, соответствующие стационарному обтеканию, а y^* и α^* – малые нестационарные отклонения. Предположим далее, что $\dot{y}_s/U_\infty \sin\alpha_s \ll 1$, и воспользуемся соотношением $\partial y^*/\partial x = \alpha^*$, которое справедливо при $\alpha^* \ll \alpha_{s0}$. Подставляя (6) в уравнение для y_s и удерживая члены первого порядка малости, получим следующее линейное однородное интегро-дифференциальное уравнение для определения величины $y^*(x, t)$:

$$y^*(x, t) = \varepsilon a_1 x \frac{\partial y^*}{\partial x} + \varepsilon a_2 x \frac{\partial y^*}{\partial t} + \varepsilon a_3 \int_0^x \frac{\partial y^*}{\partial \xi} d\xi - \varepsilon a_4 \int_0^x \frac{\partial y^*}{\partial t'} d\xi \tag{7}$$

Здесь a_1, a_2, a_3, a_4 – некоторые константы.

Будем искать решение уравнения (7) в следующем виде:

$$y^*(x, t) = A(x) f(w), \quad \omega = t - x a_2/a_1 \tag{8}$$

Учитывая, что $t' = t - (x-\xi) a_2/a_1$ (см. (5)), получим

$$(\varepsilon a_3 - 1) A(x) f(\omega) + \varepsilon a_1 x A'(x) f(\omega) - (\varepsilon a_2 a_3/a_1 + \varepsilon a_4) f_\omega'(\omega) \int_0^x A(\xi) d\xi = 0 \tag{9}$$

Введем новую функцию $B(x) = \int_0^x A(\xi) d\xi$ и перепишем уравнение (9), разделив его на $f(\omega)$

$$\varepsilon a_1 x B'' + (\varepsilon a_3 - 1) B' - (\varepsilon a_2 a_3/a_1 + \varepsilon a_4) B f'(\omega)/f(\omega) = 0 \tag{10}$$

Поскольку первые два члена в этом уравнении не зависят от t, то дробь f'/f также не должна зависеть от t, т. е. от ω:

$$f'/f = b = \text{const}, \quad f = \exp(b\omega) = \exp(bt - b x a_2/a_1) \tag{11}$$

Перепишем уравнение (10) в окончательном виде

$$B'' - B' \frac{1 - \varepsilon a_3}{\varepsilon a_1 x} - B \frac{b(a_2 a_3/a_1 + a_4)}{a_1 x} = 0 \tag{12}$$

Общим решением этого уравнения является [5]

$$B(x) = x^{\nu/2} [a_5 J_\nu(2\sqrt{x b_1}) + a_6 Y_\nu(2\sqrt{x b_1})] \tag{13}$$

$$\nu = (1 + \varepsilon a_1 - \varepsilon a_3)/\varepsilon a_1, \quad b_1 = b(a_2 a_3/a_1 + a_4)/a_1$$

Здесь a_5, a_6 – произвольные константы, J_ν, Y_ν – функции Бесселя первого и второго рода. Поскольку $A(x) = B'(x)$, то формулы (13), (11) и (8) дают частное решение интегро-дифференциального уравнения (7) с произвольными константами a_5, a_6, b. При $t=0$ из этих выражений получаем набор функций, зависящит от a_5, a_6, b, которые могут являться начальными условиями для полученного решения уравнения (7).

Рассмотрим вопрос об эволюции начального малого возмущения, соответствующего полученному решению. Из физических соображений ясно, что это возмущение должно быть равно нулю в вершине клина. Это условие дает $a_6 = 0$, поскольку

$Y_\nu(x)\to-\infty$ при $x\to 0$. Тогда начальная функция будет выглядеть следующим образом:

$$y^*(x,0)=\exp(-ba_2x/a_1)a_5\{{}^1/_2\nu x^{(\nu-2)/2}\times \times J_\nu(2\sqrt{xb_1})+{}^1/_2x^{(\nu-1)/2}[J_{\nu-1}(2\sqrt{xb_1})+J_{\nu+1}(2\sqrt{xb_1})]\} \quad (14)$$

Далее, чтобы начальное возмущение было малым при $x\to\infty$, всегда должно выполняться неравенство $b>0$. В соответствии с (11) это означает, что полученное решение экспоненциально растет во времени, т. е. является абсолютно неустойчивым.

Таким образом, получен следующий результат. Использование в граничных условиях угла наклона тела α_b приводит к отсутствию начального возмущения и к стационарному решению задачи.

Замена же α_b на угол наклона ударной волны α_s ведет к появлению абсолютно неустойчивого решения.

По-видимому, нужно сделать вывод о том, что пользоваться ньютоновским приближением в нестационарных задачах следует с большой осторожностью.

Поступила 17 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Miles J. W.* Newtonian flow over a stationary body in unsteady flow. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1.
3. *Богатко В. И., Колтон Г. А.* Пространственное нестационарное движение газа за фронтом сильной ударной волны. Вестн. Ленингр. ун-та, 1971, № 1.
4. *Богатко В. И., Колтон Г. А.* О ньютоновском приближении в задаче обтекания плоских и осесимметричных тел, движущихся с переменной скоростью. Вестн. Ленингр. ун-та, 1971, № 7.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.

УДК 533.6.011.55

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ОБТЕКАНИЯ КОНУСА БОЛЬШОГО УГЛА РАСТВОРА ПОД УГЛОМ АТАКИ

Б. Н. ДАНЬКОВ, Т. С. ПАНКОВА

(Москва)

Приводятся результаты экспериментальных исследований характера обтекания конуса большого угла раствора в аэродинамической трубе при сверхзвуковых скоростях набегающего потока. Изучению этого вопроса в последнее время уделяется большое внимание [1-3]. Данная работа расширяет представление об особенностях обтекания этого тела на больших углах атаки.

Исследования проводились при углах атаки $\alpha=0\div38°$, числе $M_\infty=5.93$ и числе $\mathrm{Re}_\infty=2.3\cdot10^6$ (в качестве характерного размера принят диаметр миделя модели D). Рассматривалась модель в виде притупленного конуса с углом полураствора $\theta_s=70°$, радиусом притупления $R\approx0.91\,D/2$ и острыми угловыми кромками. Изучались спектры обтекания модели, распределение давления и характер растекания визуализирующего состава по ее лобовой поверхности.

Дренаж модели осуществлялся по образующим конической поверхности, меридиональные плоскости которых наклонены одна к другой под углом $\Delta\varphi=30°$. В некоторых случаях для определения особенностей течения осуществлялся дополнительный дренаж в исследуемом районе. В плоскости изменения угла атаки дренажные точки располагались с интервалом $\sim0.05D$. Относительный внутренний диаметр (d/D) периферийных отверстий ~0.07, а остальных отверстий ~0.011. При определении распределения давления p_i использовалось устройство пневматической коммутации, с помощью которого измерения на каждом угле атаки проводились одним преобразователем давления путем последовательного опроса нескольких точек. В качестве преобразователя использовался малогабаритный индуктивный датчик типа МИД. Относительная среднеквадратичная погрешность нахождения величины $P=p_i/p_0'$ составляла $\mp3\%$ (p_0' – полное давление за прямым скачком).