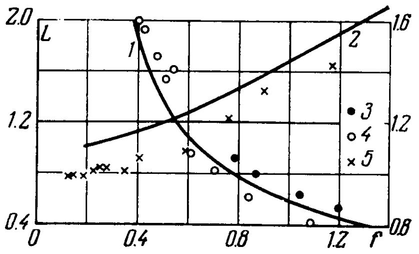
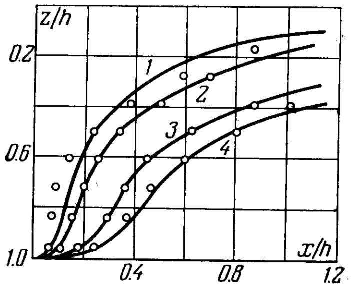
ница каверны в вертикальной плоскости (кривые *1–4*), соответствующая f=1.81, 1.43, 0.94 и 0.76. Для других удлинений получаются аналогичные зависимости.

На фиг. 2 приведены также экспериментальные значения длины каверны в среднем по высоте сечений (данные *3* – стойка *1*, h=280 *мм*, a=35 *мм*, α=0.094; *4* – стойка *2* h=160 *мм*, a=20 *мм*, α=0.156). Данные *5* на фиг. 2 соответствуют коэффициенту остаточного сопротивления стойки *3* (h=240 *мм*, a=30 *мм*, α=0.183). Коэффициент остаточного сопротивления, как обычно, определяется вычитанием из коэффициента полного сопротивления коэффициента трения технически гладкой



Фиг. 2



Фиг. 3

пластины. При эксперименте числа Рейнольдса по ширине стойки составляли $(1-5)\cdot 10^5$. Развитие каверны с ростом скорости по экспериментальным данным показано на примере стойки *2* (точки на фиг. 3). Кривая *1* соответствует начальной стадии прорыва воздуха к нижнему концу стойки. Для кривых *1–4* были получены следующие экспериментальные значения f=2.10, 1.64, 1.04 и 0.87. Приведенные на фиг. 2 и 3 данные свидетельствуют об удовлетворительном соответствии результатов расчета и эксперимента.

Поступила 16 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эпштейн Л. А.* Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. Л., «Судостроение», 1970.
2. *Бутузов А. А.* О предельных параметрах искусственной каверны, образуемой на нижней поверхности горизонтальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
3. *Костюков А. А.* Теория корабельных волн и волнового сопротивления. Л., Судпромгиз, 1959.

УДК 532.529.5:532.59

О ВОЛНАХ В СМЕСИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

С. С. БИШАЙ ХАННА

(Москва)

Рассматривается одномерное нестационарное движение смеси идеальной несжимаемой жидкости с пузырьками газа в трубе за движущимся поршнем. Получено точное решение. Изучается распространение ударных волн.

1. Введение. Наличие мелких пузырьков в жидкости сильно изменяет ее структуру. Несжимаемая жидкость с пузырьками газа может рассматриваться как сжимаемая среда с внутренними параметрами. В работе [1] предложена модель для изучения такой среды с одним внутренним параметром R (радиус пузырьков), уравнения состояния которой

$$p=p_n-\rho_0\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right],\qquad \rho=\frac{\rho_0}{1+b(R^3-R_0^3)},\qquad b=\frac{4}{3}\pi n\rho_0 \tag{1.1}$$

Здесь n – число пузырьков в единице массы, которое считается постоянным, и p_n – давление газа внутри пузырьков, которое считается постоянным внутри пузырька. Смесь считается сжимаемой при $R>R_0$. Поверхностным натяжением пренебрегается.

Здесь рассматривается движение такой среды в трубе с одним закрепленным концом. Обозначим характеристики «начального» предварительного состояния до развития кавитации через $R=R_0$, $u=0$, $p=p_1$, $\rho=\rho_0$.

Пользуясь лагранжевой координатой ξ, которая обозначает расстояние от закрепленного конца трубы в начальный момент, напишем уравнения неразрывности и движения в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \xi}=0 \tag{1.2}$$

Ниже рассматриваются частные точные решения системы уравнений (1.1) и (1.2). Принимается, что давление в пузырьке равно давлению в жидкости не только на границе пузырька, но и в малой окрестности жидкости около пузырька. Это предположение равносильно равенству

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2=0 \tag{1.3}$$

Далее рассмотрим частное решение этого уравнения

$$R_1(\xi, t)=[A(\xi+ct)+B]^{2/5} \tag{1.4}$$

где A, B, C – постоянные. Из этого решения следует, что фиксированные значения ρ и R распространяются по частицам с постоянной скоростью.

2. Непрерывные движения. Можно заметить, что система уравнений (1.1) и (1.2) имеет следующие классы решений.

Первый класс

$$R=R_1(\xi, t),\qquad u=bc[R_1^3-R_1^3(0, t)]$$

$$p=p_n-\rho_0 bc^2\left[R_1^3-\frac{6}{5}A\xi R_1^{1/2}(0,t)-R_1^3(0,t)\right]$$

где $A>0$, $c>0$, $B^{2/5}\geqslant R_0$. Это решение удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u=0,\qquad p=p_0(t)\qquad (\xi=0)$$

$$u=V(t)=bc\{[A(h+ct)+B]^{6/5}-(Act+B)^{6/5}\}\qquad (\xi=h)$$

В этом случае вся смесь в трубе является сжимаемой жидкостью, в которой начальные распределения радиусов пузырьков и скоростей имеют вид

$$R(\xi, 0)=(A\xi+B)^{2/5},\qquad u(\xi, 0)=bc[(A\xi+B)^{6/5}-B^{6/5}]$$

Второй класс

$$R=R_1,\qquad u=bc[R_1^3-R_0^3],\qquad p=p_n=p_0(t)-\rho_0 bc^2(R_1^3-R_0^3)$$

где $A>0$, $c>0$, $(Al+B)^{2/5}=R_0$, $0<l<h$. Это решение удовлетворяет уравнениям состояния, неразрывности и движения (1.1) и (1.2) в зоне кавитирующей жидкости $\xi^*(t)<\xi\leqslant h$, где $R>R_0$. При $\xi^*\geqslant\xi$ в трубе имеется несжимаемая жидкость в покое. Поверхность раздела между зонами сжимаемой и несжимаемой жидкостей $\xi=\xi^*$ движется в сторону закрепленного конца трубы со скоростью c

$$\frac{d\xi^*}{dt}=-c,\qquad \xi^*=l-ct$$

Зона несжимаемой жидкости исчезает через промежуток времени $\tau=l/c$, и жидкость будет везде сжимаемой. В зоне несжимаемой жидкости $R=R_0$, $u=0$, $p=p_0(t)$, $\rho=\rho_0$ – характеристики движения. Решение удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u=0,\qquad p=p_0(t)\qquad (\xi=\xi^*),\qquad u=V(t)=bc\{[A(h+ct)+B]^{6/5}-R_0^3\}$$

3. Движение со скачком. Для изучения движения смеси в трубе за движущимся поршнем возьмем решение системы уравнений (1.1) и (1.2) в виде

$$R=R_1,\qquad u=T(t)+bcR_1^3 \tag{3.1}$$

$$p=p_n=\pi(t)-\rho_0\xi\frac{dT}{dt}-\rho_0 bc^2R_1^3$$

где $T(t)$ и $\pi(t)$ – произвольные функции времени, а A, B, c – произвольные постоянные, которые можно определить из условий задачи.

Рассмотрим поршень в контакте с частицами с лагранжевой координатой $\xi=h$, который движется во внешнюю сторону со скоростью $V(t)>0$. Предположим, что в смеси имеются следующие начальные распределения радиусов пузырьков и скоростей частиц:

$$R=(A\xi+B)^{2/5}, \qquad u_0=T(0)+bc(A\xi+B)^{6/5}$$

где $A>0$, $c>0$, $(Al+B)^{2/5}=R_0$, $0<l\leqslant h$. Предположим, что сечение $\xi=\xi^*(t)>(l-ct)$ – поверхность разрыва в момент t и v^* – скорость распространения разрыва, т. е. $v^*=d\xi^*/dt$. Поверхность разрыва $\xi=\xi^*$ – поверхность раздела между несжимаемой жидкостью в зоне $\xi<\xi^*$ и сжимаемой жидкостью при $\xi>\xi^*$. Решение удовлетворяет следующим граничным условиям на поверхности поршня и на поверхности разрыва [2, 3]:

$$u=V(t) \qquad (\xi=h) \tag{3.2}$$

$$\rho^*(v^*-u^*)=\rho_0 v^*, \qquad p^*+\rho^* u^*(u^*-v^*)=p_0 \tag{3.3}$$

где u^*, p^*, ρ^* – характеристики сжимаемой жидкости за поверхностью разрыва $(\xi=\xi_+^*)$, т. е.

$$u^*=T(t)+bcR_1^3(\xi^*,t), \qquad p=\pi(t)-\rho_0\xi^*\frac{dT}{dt}-\rho_0 bc^2R_1^3(\xi^*,t) \tag{3.4}$$

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+b[R_1^3(\xi^*,t)-R_0^3]}$$

Характеристики несжимаемой жидкости перед поверхностью $(\xi=\xi_-^*)$

$$R=R_0, \qquad u=0, \qquad p=p_0(t), \qquad \rho=\rho_0$$

Условие (3.2) дает

$$T(t)=V(t)-bc[A(h+ct)+B]^{6/5}$$

Условия (3.3) определяют неизвестные функции $\xi^*(t)$ и $\pi(t)$. Подставляя выражения (3.4) в первое условие (3.3), получим отношение для $\xi^*(t)$ в виде

$$\frac{5b}{11A}\{R_1^{11/2}(\xi,t)-R_1^{11/2}(h,t)-R_1^{11/2}(l,0)+R_1^{11/2}(h,0)\}+ \tag{3.5}$$

$$+bR_0^3(l-\xi^*)+\int_0^t V(t)\,dt=0$$

Функция $\pi(t)$ может быть определена из второго условия (3.3) в форме

$$\pi(t)=p_0(t)+\rho_0\xi^*\left[\frac{dV}{dt}-\frac{6}{5}bAc^2R_1^{1/2}(h,t)\right]+ \tag{3.6}$$

$$+\rho_0 bc^2R_1^3(\xi^*,t)-\frac{\rho_0}{b}\frac{[V(t)+bcR_1^3(\xi^*,t)-bcR_1^3(h,t)]^2}{[R_1^3(\xi^*,t)-R_0^3]}$$

Таким же образом можно рассмотреть движение смеси жидкости с пузырьками газа за движущимся поршнем, если он движется внутрь.

Во всех рассмотренных выше решениях приток тепла

$$\frac{dq^e}{dt}=c_v\frac{dT}{dt}+3\frac{p}{\rho_0}R^2\dot{R}$$

где c_0 – удельная теплоемкость.

Обсуждаемые выше решения демонстрируют существование волновых решений для движения кавитирующей жидкости, в соответствии с которыми фиксированные значения плотности распространяются с постоянной скоростью. Эти решения показывают возможность распространения ударных волн в кавитирующей жидкости.

Автор благодарит Л. И. Седова за обсуждение и замечания.

Поступила 15 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
2. *Бишай Ханна С. С.* О движении жидкости с пузырьками газа. Изв. АН СССР, МЖГ., 1971, № 6.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.