

даны в [2]. Если функция  $r(x)$  аналитическая в окрестности полюса, то решение уравнений (2.2), (2.3) можно при малых  $x$  представить рядами

$$(3.4) \quad \Phi(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \Phi_n(\mu), \quad G(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n G_n(\mu)$$

К аналогичным результатам приводит преобразование, использованное в [1].

В случае, когда пограничный слой начинается на кромке ( $r(0) \neq 0$ ,  $dr(0)/dx > 0$ ), решение теряет «автомодельный» характер, так как имеет место равенство

$$(3.5) \quad \gamma_{10} = \gamma_{20} = 0$$

Уравнения (3.1), (3.2) с условиями (3.3), (3.5) интегрировались численно методом итераций [3]. Результаты расчетов приведены на фиг. 1. Представляющие наибольший интерес постоянные равны

$$\Phi_0''(0) = 0.52847, \quad G_0'(0) = -0.48444, \quad \Phi_0(\infty) = 0.37601$$

Функции  $\Phi_0(\mu)$  и  $G_0(\mu)$  не зависят от конкретных значений  $r(0)$  и  $dr(0)/dx$  и в этом смысле являются универсальными. При аналитической в окрестности нуля функции  $r(x)$  решение задачи (2.2)–(2.4) вблизи кромки представимо рядами

$$(3.6) \quad \Phi(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{4n} \Phi_n(\mu), \quad G(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{4n} G_n(\mu)$$

В заключение отметим, что вид уравнений пограничного слоя (2.2), (2.3) является удобным не только для получения и исследования решения на начальном участке, но и для численного интегрирования во всей области, где  $dr/dx > 0$ . При этом ряды (3.4) или (3.6) могут быть эффективно использованы на начальной стадии интегрирования, например, так, как были использованы ряды Хуарта [6] при расчете пограничного слоя на вращающейся сфере [7].

Поступила 16 VI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боршевский В. Д. О трехмерным осесимметричным проблемами граничного слоя. Матем. вестн., 1969, т. 6, № 2.
2. Дорфман Л. А. Расчет пограничного слоя, образующегося на произвольной осесимметричной поверхности, вращающейся в неподвижной среде. ПМТФ, 1965, № 3.
3. Дорфман Л. А. Скоростной и тепловой пограничные слои на осесимметричном теле, вращающемся в неограниченной неподвижной среде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
4. Гайс Т. Подобные пограничные слои на телах вращения. В сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи». М. — Л., Госэнергоиздат, 1960.
5. Rogers M. H., Lance G. N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 4.
6. Howarth L. Note on the boundary layer on a rotating sphere. Philos. Mag., 1951, Ser. 7, vol. 42, No. 334.
7. Manohar R. The boundary layer on a rotating sphere. Z. Angew. Math. und Phys., 1967, vol. 18, Fasc. 3.

УДК 532.528

### СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ КЛИНОВИДНОЙ СТОЙКИ, ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

К. В. АЛЕКСАНДРОВ

(Ленинград)

Рассмотрено решение задачи о струйном обтекании тонкой клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность. Определены размеры каверны, возникающей за стойкой, и коэффициент сопротивления. Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными.

При движении тел, пересекающих свободную поверхность воды, может наблюдаться прорыв воздуха в их кормовой части [1]. Это явление особенно ярко проявляется тогда, когда на теле имеются острые кромки, фиксирующие положение точек схода струй. В этом случае образующаяся за телом воздушная каверна имеет

устойчивые прозрачные границы, а давление в ней равно практически атмосферному.

Ниже рассмотрена задача об обтекании тонкой клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность. При этом набегающий поток считается однородным, жидкость — идеальной и несжимаемой, а течение — безвихревым. Течение полагается также симметричным относительно плоскости  $xz$  (Фиг. 1). Ось  $x$  прямоугольной системы координат направлена по потоку, ось  $z$  — вертикально вниз по направлению действия ускорения силы тяжести  $g$ . Стойка и каверна считаются тонкими, а граничные условия выполняются на плоскости  $y=0$ . Линеаризованные граничные условия, выражающие непротекание жидкости через твердую границу и границу каверны, а также постоянство давления в каверне, имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha v, \quad y=0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{p_k}{\rho} - zg = \frac{p}{\rho}, \quad y=0$$

Здесь  $\alpha$  — половина угла при вершине клиновидного профиля стойки,  $\eta$  — ординаты поверхности каверны,  $p$  — давление на свободной поверхности,  $p_k$  — давление в каверне,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\varphi$  — потенциал вызванных скоростей.

На свободной поверхности выполняется условие постоянства давления

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{g}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z=0)$$

Потенциал вызванных скоростей удобно представить как непрерывное распределение источников

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^h \int_{-a}^{l(z)} q_1(\xi, \zeta) \varphi_1(\xi, \zeta, x, y, z) d\xi d\zeta$$

Здесь  $l(z)$  — граница каверны в вертикальной плоскости,  $h$  — величина погружения стойки,  $a$  — ширина стойки,  $q_1$  — интенсивность источников,  $\varphi_1$  — потенциал источника, удовлетворяющий условию (3) на свободной поверхности.

При таком задании потенциала удовлетворяются необходимые условия на бесконечности. Нормальная производная на плоскости  $y=0$  равна  $\partial \varphi / \partial y = q_1/2$ . Последнее соотношение позволяет, если учесть (2), непосредственно выразить ординаты каверны через интенсивность особенностей

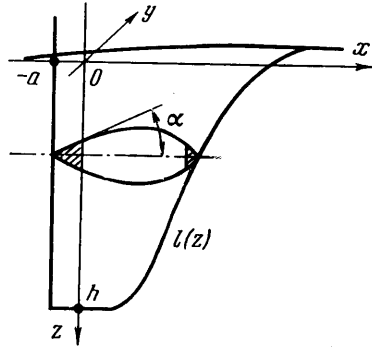
$$(4) \quad \eta(x, z) = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^x q_1(\xi, z) d\xi$$

Из условия постоянства давления в каверне (2), а также из условия равенства его давлению на свободной поверхности  $p_k=p$  следует, что интенсивность особенностей должна удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$(5) \quad \int_0^1 \int_0^l q(\xi, \zeta) K_\alpha(\xi, \zeta, x, z) d\xi d\zeta - 2\pi z f = - \int_0^1 \int_{-a}^0 K_\alpha(\xi, \zeta, x, z) d\xi d\zeta$$

$$q = \frac{q_1}{2\alpha U}, \quad K_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad f = \frac{gh}{\alpha v^2}$$

В (5) и далее все линейные размеры отнесены к величине погружения стойки  $h$ . Вследствие условия постоянства давления в каверне критическая точка не может располагаться на поверхности каверны. Последнее обстоятельство, как известно, приводит к тому, что кавитационные течения не могут быть в общем случае



Фиг. 1

описаны в рамках стационарного движения идеальной жидкости. Для того чтобы такое описание сделать возможным, вводится дополнительная схематизация течения в хвосте каверны. В настоящее время известно несколько схем. В них истинное течение в хвостовой области каверны заменяется воображаемым. В данном случае целесообразно воспользоваться видоизмененной схемой Рябушинского [2], т. е. замыкать каверну на фиктивный клин, ширина которого меньше ширины стойки. Длина каверны при этом должна быть больше ширины стойки.

Для того чтобы получить замкнутую каверну, суммарная интенсивность источников должна быть равна нулю

$$(6) \quad \int_0^1 \int_{-a}^l q(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = 0$$

В выражениях (5) и (6) граница каверны в вертикальной плоскости  $l(z)$  неизвестна и определяется в результате решения задачи. Ядро интегрального уравнения в принятых обозначениях имеет следующий вид [3]

$$(7) \quad K_\alpha = \frac{x-\xi}{r^3} - \frac{x-\xi}{r_1^3} + \alpha^2 f^2 I(\xi, \zeta, x, z, \alpha, f)$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2, \quad r_1^2 = (x-\xi)^2 + (z+\zeta)^2$$

где  $I$  — ограниченная функция, кроме точек, принадлежащих свободной поверхности.

Как следует из (7), для предельно малых значений параметра  $\alpha$  последним слагаемым в этом выражении можно пренебречь. В дальнейшем используется предельное выражение для ядра

$$K = \frac{x-\xi}{r^3} - \frac{x-\xi}{r_1^3}$$

В этом случае интегральное уравнение можно решить приближенно путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого область интегрирования разбивается на ряд элементарных площадок. На каждой площадке функция  $q(\xi, \zeta)$  полагается линейной по  $\xi$  и постоянной по  $\zeta$ . При таком задании функции  $q(\xi, \zeta)$  ординаты поверхности каверны аппроксимируются участками парабол, гладко сопряженных друг с другом в пределах каждой полосы, и выполняется условие плавного сопряжения со стойкой и фиктивным клином. Уравнение удовлетворяется в центрах элементарных площадок.

Граница каверны в вертикальной плоскости определяется последовательными приближениями. Задаются размеры стойки и длина каверны в среднем по высоте сечений ( $z=h/2$ ). В первом приближении форма каверны принимается в виде прямоугольника с длинной стороны в направлении оси  $z$ , равной единице, и в направлении оси  $x$  — длине каверны в среднем по высоте сечения, в котором удовлетворяется и условие замкнутости каверны. При этом в результате решения системы уравнений ордината хвостовой точки каверны в этом сечении будет равна нулю, а в остальных — отлична от нуля. Далее, по данным первого приближения, путем экстраполяции (для верхних сечений относительно среднего) и интерполяции (для нижних сечений) находятся длины каверны в остальных сечениях, которые считаются исходными при вычислениях следующего приближения, и т. д. Расчеты повторяются до тех пор, пока все концевые ординаты каверны не будут меньше некоторого заданного числа.

Одновременно с определением ординат поверхности каверны рассчитывается коэффициент сопротивления клиновидной стойкости

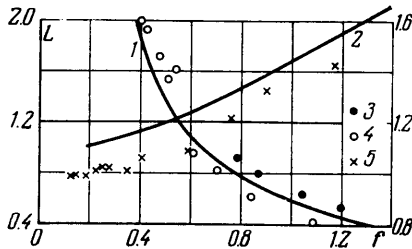
$$C_x = \frac{2X}{\rho U^2 ah} = \alpha^2 \left( f - \frac{2}{a} \int_0^1 \int_{-a}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\xi d\zeta \right)$$

Для проверки сходимости приближенного решения интегрального уравнения рассматривались системы с различным числом уравнений. Так, для стойки удлиненным  $\lambda=h/a=8$  и  $L=l/h=0.25, 0.5$  и  $1$  расхождения в значениях  $f$  и коэффициента сопротивления при числе уравнений 41 и 73 не превышали 2%. Удовлетворительное соответствие было получено также в величине ординат поверхности каверны.

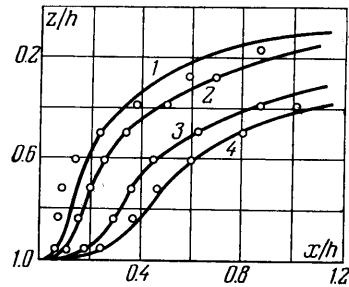
На фиг. 2 приведены характерные зависимости длины каверны  $L$  в среднем по высоте сечений (кривая 1) и коэффициента сопротивления (кривая 2) от величины  $f$  для стойки удлиненным  $\lambda=8$ . Для той же стойки на фиг. 3 показана гра-

ница каверны в вертикальной плоскости (кривые 1-4), соответствующая  $f=1.81, 1.43, 0.94$  и  $0.76$ . Для других удлинений получаются аналогичные зависимости.

На фиг. 2 приведены также экспериментальные значения длины каверны в среднем по высоте сечений (данные 3 - стойка 1,  $h=280$  мм,  $a=35$  мм,  $\alpha=0.094$ ; 4 - стойка 2  $h=160$  мм,  $a=20$  мм,  $\alpha=0.156$ ). Данные 5 на фиг. 2 соответствуют коэффициенту остаточного сопротивления стойки 3 ( $h=240$  мм,  $a=30$  мм,  $\alpha=0.183$ ). Коэффициент остаточного сопротивления, как обычно, определяется вычитанием из коэффициента полного сопротивления коэффициента трения технически гладкой



Фиг. 2



Фиг. 3

пластины. При эксперименте числа Рейнольдса по ширине стойки составляли  $(1-5) \cdot 10^5$ . Развитие каверны с ростом скорости по экспериментальным данным показано на примере стойки 2 (точки на фиг. 3). Кривая 1 соответствует начальной стадии прорыва воздуха к нижнему концу стойки. Для кривых 1-4 были получены следующие экспериментальные значения  $f=2.10, 1.64, 1.04$  и  $0.87$ . Приведенные на фиг. 2 и 3 данные свидетельствуют об удовлетворительном соответствии результатов расчета и эксперимента.

Поступила 16 V 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эпштейн Л. А. Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. Л., «Судостроение», 1970.
2. Бугузов А. А. О предельных параметрах искусственной каверны, образуемой на нижней поверхности горизонтальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
3. Костюков А. А. Теория корабельных волн и волнового сопротивления. Л., Судпромгиз, 1959.

УДК 532.529.5:532.59

### О ВОЛНАХ В СМЕСИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

С. С. БИШАЙ ХАННА

(Москва)

Рассматривается одномерное нестационарное движение смеси идеальной несжимаемой жидкости с пузырьками газа в трубе за движущимся поршнем. Получено точное решение. Изучается распространение ударных волн.

1. Введение. Наличие мелких пузырьков в жидкости сильно изменяет ее структуру. Несжимаемая жидкость с пузырьками газа может рассматриваться как сжимаемая среда с внутренними параметрами. В работе [1] предложена модель для изучения такой среды с одним внутренним параметром  $R$  (радиус пузырьков), уравнения состояния которой

$$(1.1) \quad p = p_n - \rho_0 \left[ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right], \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 + b(R^3 - R_0^3)}, \quad b = \frac{4}{3} \pi \rho_0$$

Здесь  $n$  - число пузырьков в единице массы, которое считается постоянным, и  $p_n$  - давление газа внутри пузырьков, которое считается постоянным внутри пузырька. Смесь считается сжимаемой при  $R > R_0$ . Поверхностным натяжением пренебрегается.