МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1976

УДК 532.5.013.4+523.84

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ГРАВИТИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ ШАРОВ

Н. Р. СИБГАТУЛЛИН

(Москва)

Среди различных моделей пульсаций переменных звезд типа цефеид особое место занимает решение с однородными нелинейными пульсациями гравитирующих газовых шаров [1, 2]. Это физически простая модель, которую можно рассчитать аналитически. Это решение не объясняет, почему максимум светимости звезды наступает не в момент наибольшего сжатия, а на четверть периода позже. Кроме того, в теории асимметрия в кривой лучевой скорости для звезды из водорода проявляется лишь при больших амплитудах пульсаций, в то время как для большинства цифеид степень сжатия при пульсациях не превышает 10–15%. Тем не менее это решение довольно точно предсказывает период пульсаций по плотности звезды (если определять массу цефеиды по эмпирическому закону масса – светимость).

Методы исследования устойчивости гравитирующих объектов возникли в теории фигур равновесия. Основные результаты в этой области относятся к несжимаемой жидкости. Кроме решений о вращениях несжимаемой жидкости как твердого тела (сфероиды Маклорена, Якоби, кольца Лапласа и т. д.) были исследованы задачи с полем скоростей, линейным по координатам (решения Дирихле, Дедекинда, Пуанкаре и др. (см. ссылки в [3])).

Ляпунов показал, что единственной статической формой равновесия гравитирующей несжимаемой жидкости может быть только сфера. Если считать, что в мыслимых измененных состояниях тело вращается так же, как твердое, то его можно рассматривать как динамическую систему. Тогда данное равновесие тела будет устойчивым, если в этом состоянии энергия тела достигает минимального значения при фиксированных значениях обобщенных импульсов, соответствующих циклическим координатам. Так были исследованы устойчивость линейных серий Маклорена и Якоби (Пуанкаре, Дарвин, Джинс и др.). В общей постановке проблема малых колебаний была исследована Пуанкаре и Брианом. При учете малых поправок постньютоновской теории в ОТО проблема устойчивости классических фигур равновесия была поставлена и исследована Чандрасекаром, который в частности, изучил влияние на устойчивость нового феномена ОТО – испускания гравитационных волн при колебаниях [4].

Учет сжимаемости газа приводит к новым эффектам, характерным для нелинейных нестационарных движений. Автомодельные решения и решения со скоростями, линейными по координатам, рассмотрены в [2], а в магнитной гидродинамике – в [5]. Нерадикальные колебания шаров Эмдена исследованы в [6]. В данной статье изучается устойчивость точного решения с однородной плотностью, периодически зависящей от времени. Ниже показывается, что уравнения для произвольных малых возмущений этого решения после разложения возмущений по некоторой системе собственных функций приводятся к системе обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами.

Устойчивость по Ляпунову решений такой системы связана с поведением характеристических показателей этой системы, которые параметрически зависят от амплитуды фоновых пульсаций. Оказывается, что для каждого собственного значения существует свое критическое значение амплитуды фоновых пульсаций, при которой в системе возникает параметрический резонанс сферических звуковых волн. В линейной теории амплитуды сферических возмущений неограниченно возрастают при сверхкритической амплитуде фоновых пульсаций. Режим нелинейных однородных пульсаций с температурой, падающей до нуля на границе шара, оказывается неустойчивым относительно несферических возмущений с достаточно большим номером сферической гармоники. Развит метод приближенного построения характеристического показателя, соответствующего растущей моде колебаний. Когда происходит тепловое перемешивание вблизи границы вследствие вихревых адиабатических движений газа, то начинают играть роль существенно нелинейные эффекты, которые в работе не рассматриваются.

1. Опишем вкратце невозмущенное решение, отсылая за подробностями к [2]. В изучаемых движениях гравитирующего газа r — расстояние жидкой частицы до центра симметрии в момент t является линейной функцией ее первоначального расстояния ξ: $r=\xi\mu^{-1}(t)$. Плотность газа при пульсациях остается однородной по частицам: $\rho=\rho_0\mu^3(t)$, где $\rho_0=\text{const}$. При адиабатических пульсациях с показателем адиабаты $\gamma>{}^4/_3$ энтропия переменна по частицам

$$p=p_0\rho_0(R^2-\xi^2)\mu^{3\gamma} \tag{1.1}$$

После подстановки этих выражений в уравнения Эйлера, используя уравнение Пуассона для гравитационного потенциала, получаем уравнение для функции $\mu(t)$, первый интеграл которого имеет вид

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2=\mu^4\left(-\frac{4p_0}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)}+\frac{8\pi G\rho_0}{3}\mu+\chi\right) \tag{1.2}$$

Можно показать [2], что правая часть (1.2) имеет два корня при значениях константы χ в интервале

$$0>\chi>-\frac{8\pi}{9}\left(\frac{3\gamma-4}{\gamma-1}\right)\left(\frac{2\pi G\rho_0}{3p_0}\right)^{1/(3\gamma-4)}G\rho_0$$

Соответствующий интеграл (1.2) и характеризует нелинейные периодические пульсации.

2. Запишем уравнения газовой динамики с тяжестью в переменных t и $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mu\left[\left(\mathbf{v}+\frac{\xi}{\mu^2}\frac{d\mu}{dt}\right)\cdot\nabla\right]\mathbf{v}=-\frac{\mu}{\rho}\nabla p+\mu\nabla\varphi \tag{2.1}$$

$$\mu^2\nabla^2\varphi=-4\pi G\rho \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mu\left[\left(\mathbf{v}+\frac{\xi}{\mu^2}\frac{d\mu}{dt}\right)\cdot\nabla\right]\rho+\mu\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+\mu\left[\left(\mathbf{v}+\frac{\xi}{\mu^2}\frac{d\mu}{dt}\right)\cdot\nabla\right]\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0 \tag{2.4}$$

(Векторные операции дифференцирования в (2.1)—(2.4) берутся по переменной ξ.)

Будем считать возмущения $\mathbf{v}$, p, ρ малыми и линеаризируем уравнения (2.1)—(2.4) около решения, описанного в п. 1. Пусть $K=\delta\rho/\rho$ — относительное возмущение плотности. Если взять дивергенцию уравнения (2.1) и воспользоваться уравнениями (2.2) и (2.3), то получим

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}K\right]-\frac{\nabla^2\delta p}{\rho_0\mu^2}-6p_0\mu^{-2+3\gamma}K-2p_0\mu^{-2+3\gamma}(\xi\cdot\nabla)K-$$
$$-4\pi G\rho_0\mu^2K=0 \tag{2.5}$$

Введем вместо $\delta\mathbf{v}$ новую искомую функцию $\mathbf{w}$ по формуле

$$\delta\mathbf{v}\cdot\mu=(\partial/\partial t)\mathbf{w} \tag{2.6}$$

Тогда первый интеграл уравнения (2.4) для малых возмущений запишется в виде

$$\frac{\delta p}{\mu^{3\gamma}}-\gamma p_0\rho_0(R^2-\xi^2)K-2p_0\rho_0\mathbf{w}\cdot\xi=f(\xi) \tag{2.7}$$

Так как добавление к $\mathbf{w}$ произвольной вектор-функции $\varphi(\xi)$ согласно (2.6) не изменяет $\delta\mathbf{v}$, то за счет такой возможности положим функцию $f(\xi)=0$.

С помощью (2.7) из (2.5) получим

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}K\right]-\mu^{3\gamma-2}p_0\{\nabla^2(R^2-\xi^2)K+2K+2((\xi\cdot\nabla)K+\xi\cdot\Delta\mathbf{w})+ \tag{2.8}$$

$$+4(K+\operatorname{div}\mathbf{w})\}-4\pi G\rho_0\mu^2K=0$$

Первый интеграл линеаризованного уравнения (2.3) имеет вид

$$K+\operatorname{div}\mathbf{w}=\psi(\xi) \tag{2.9}$$

Из уравнения (1.1) следует уравнение для вихревой функции Q:

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial t}Q\right]=2p_0\mu^{3\gamma-2}\Delta_1K, \tag{2.10}$$

$$\Delta_1K\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{K}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2K}{\partial\varphi^2}$$

$$Q\equiv\xi\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w}=\nabla\operatorname{div}\mathbf{w}-\Delta\mathbf{w}=\nabla\psi(\xi)-(\Delta\mathbf{w}+\nabla K)$$

Без ограничения общности положим функцию $\psi(\xi)$ в (2.9) равной нулю (при $\psi(\xi)\neq0$ система становится неоднородной).

Введем новую переменную τ и будем обозначать точкой дифференцирование по $\tau: \sqrt{2p_0}\mu^2dt=d\tau$. Тогда однородные уравнения (2.8), (2.10) перепишутся в виде

$$\mu^{5-3\gamma}\ddot{K}-\frac{1}{2}\gamma\nabla^2[(R^2-\xi^2)K]-K-\frac{2\pi G\rho_0}{p_0}\mu^{4-3\gamma}K+Q=0 \tag{2.11}$$

$$\mu^{5-3\gamma}\ddot{Q}=\Delta_1K \tag{2.12}$$

Отметим, что всякое возмущение, если оно не является сферически-симметричным, обязательно будет вихревым в силу неоднородности распределения энтропии в невозмущенном решении.

Представим функции Q и K в виде разложения по сферическим гармоникам

$$\begin{Bmatrix}Q\\K\end{Bmatrix}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\begin{Bmatrix}Q_{lm}(\xi,t)\\K_{lm}(\xi,t)\end{Bmatrix}p_l^m(\theta)e^{im\varphi} \tag{2.13}$$

(Здесь $p_l^m(\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.)

Рассмотрим в промежутке $[0, R]$ собственные функции оператора

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{d}{d\xi}(R^2-\xi^2)y_n\right]-\frac{l(l+1)y_n(R^2-\xi^2)}{\xi^2}=-E_ny_n \tag{2.14}$$

Далее будет показано, что этот оператор обладает дискретным спектром.

Введем подстановки

$$(R^2-\xi^2)y_n(\xi)=\xi^lq_n(x),\quad x\equiv2\xi^2/R^2-1 \tag{2.15}$$

Тогда уравнение (2.14) перепишется в виде

$$(1-x^2)\frac{d^2q_n}{dx^2}+\frac{1}{2}(1-x)(2l+3)\frac{dq_n}{dx}+\frac{E_n}{4}q_n=0 \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует, что функции q_n должны обращаться в нуль при $x=1$. При произвольных E_n решение (2.16) выражается через гипергеометрические функции, однако лишь при некоторых дискретных значениях E_n решения (2.16) обращаются в нуль при $x=1$. Это известная система ортогональных полиномов Якоби [7]

$$q_n=P_n^{-1,l+1/2}(x)=\sum_{m=0}^{n=1}\binom{n-1}{m}\binom{n+l+1/2}{n-m}(x-1)^{n+m}(x+1)^m$$

При этом $E_n=4n(n+l+1/2)$.

Выпишем первые три собственные функции $y_n(\xi)$ с нормировкой $y_n(R)=1$

(2.17) $$y_1(\xi)=\sigma^l,\quad y_2(\xi)=2^{-2}\sigma^l[(2l+7)\sigma^2-2l-3],\quad y_3(\xi)= =6^{-1}\sigma^l[(l^2+7l+{}^{69}/_4)\sigma^4-\sigma^2(2l^2+11l+15)+l^2+4l+{}^{15}/_4],\ \sigma\equiv\xi R^{-1}$$

После разложения функций $K_{lm}(\xi,t)$ и $Q_{lm}(\xi,t)$ по полной системе полиномов $y_n(\xi)$

$$K_{lm}(\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(t)y_n(\xi),\qquad Q_{lm}=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)y_n(\xi)$$

из (2.11) и (2.12) легко получаем обыкновенное уравнение четвертой степени для $Q_n(t)$

(2.18) $$\mu^{5-3\gamma}[\mu^{5-3\gamma}\dot{Q}_n]^{\cdot\cdot}+\left[2\gamma_n(n+l+1/2)-1-\frac{2\pi G\rho_0}{p_0}\mu^{4-3\gamma}\right]\mu^{5-3\gamma}\dot{Q}_n- -l(l+1)Q_n=0$$

3. Рассмотрим устойчивость равновесной конфигурации, когда $\mu\equiv1$, $3p_0=2\pi G\rho_0$. Тогда решения уравнения (2.14) можно искать в виде $Q=\mathrm{const}\exp(\lambda\tau)$, причем для λ получаем уравнение

(3.1) $$\lambda^4+[2\gamma n(n+l+1/2)-4]\lambda^2-l(l+1)=0$$

Два корня этого уравнения являются сопряженными и чисто мнимыми. Они соответствуют звуковым волнам. Два других корня соответствуют вихревым возмущениям, одно из которых экспоненциально растет.

Возникновение неустойчивости можно понять следующим образом. Рассмотрим (см., например, [8]) устойчивость в поле тяжести газа, более холодного «сверху» и теплового «снизу» (сила тяжести направлена вниз). Плотность газа считаем постоянной.

При малых возмущениях малая частица сверху, проникая (вначале незначительно) в нижний «теплый» слой, будет иметь плотность $(p_2/p_1)^\gamma$. Но тогда архимедова сила, действующая на частицу, будет меньше веса частицы, и та будет увлекаться вниз. Возникает конвекция, когда нижние «теплые» слои начинают перемешиваться с верхними «холодными».

Отметим, что из вида функций $y_n(\xi)$ при $n\sim1$, $l\gg1$ (см. (2.17)) следует, что эти функции практически равны нулю, за исключением малой окрестности границы.

С другой стороны, наибольшие инкременты роста λ_n согласно (3.1) имеют место при сильно несферических возмущениях $l\gg1$, $n\sim1$, тогда $\lambda_n\sim\sqrt{l}$. Поэтому сильнее всего тепловое перемешивание происходит вблизи границы гравитирующего статического газового шара.

4. Рассмотрим теперь, не могут ли нелинейные пульсации воспрепятствовать указанной неустойчивости. Пусть $\gamma={}^5/_3$ (многие авторы склоняются считать вещество цефеид полностью ионизованным газом). Тогда

$\mu=1+A\cos\tau$ и уравнение (2.14) приводится к виду

$$Q^{\mathrm{IV}}+\left[\frac{10}{3}n(n+l+{}^1/_2)-4+\frac{3A\cos\tau}{1+A\cos\tau}\right]\ddot{Q}-l(l+1)Q=0 \tag{4.1}$$

Рассмотрим вначале сферические возмущения, относительно которых статическая конфигурация согласно п. 3 будет устойчивой.

Пусть $l=0$, $n=2$, (случай $n=1$, $l=0$ соответствует изменению амплитуды однородных колебаний и одно из решений (2.11) при $Q=0$ имеет вид $K=\mathrm{const}\,\dot{\mu}(\tau)\mu(\tau)$).

Следуя общей схеме нахождения характеристических показателей Ляпунова для уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами [9], будем искать численно решения уравнения

$$\ddot{K}+\left(\frac{47}{3}-\frac{3}{1+A\cos\tau}\right)K=0 \tag{4.2}$$

$$K_{(1)}(0)=1,\quad \dot{K}_{(1)}(0)=0;\quad K_2(0)=0,\quad \dot{K}_{(2)}(0)=1$$

Тогда характеристические показатели (вернее, экспоненты от них) будут корнями уравнения

$$s^2-\alpha s+1=0\quad (\alpha\equiv K_{(1)}(2\pi)+\dot{K}_{(2)}(2\pi))$$

Ниже даны численные значения коэффициентов α при различных значениях амплитуды A.

A	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
α	−1.88	−1.91	−1.95	−1.99	−1.99	−1.85	−1.23	−1.22	−17.65

Очевидно, случай параметрического резонанса соответствует $\alpha=\pm2$. Если $|\alpha|<2$, то волны, не усиливаясь, изменяются как почти периодические функции. Если же $|\alpha|>2$, то волны усиливаются за период и система становится неустойчивой. Численный расчет показывает, что при амплитуде нелинейных колебаний $A<0.815$ режим пульсаций устойчив, при $A>0.815$ режим неустойчив по отношению к собственным звуковым сферическим колебаниям с $n=2$.

5. Если $l\neq0$, то можно показать, что среди решений уравнения (2.18) существуют четыре независимые функции Q_i ($i=1, 2, 3, 4$), такие, что $Q_i(\tau)=S_iQ_i(\tau+2\pi)$ ($i=1, 2, 3, 4$). Тогда экспоненты от характеристических показателей можно найти из уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1-s, & y_2, & y_3, & y_4 \\ \dot{y}_1, & \dot{y}_2-s, & \dot{y}_3, & \dot{y}_4 \\ \ddot{y}_1, & \ddot{y}_2, & \ddot{y}_3-s, & \ddot{y}_4 \\ \dddot{y}_1, & \dddot{y}_2, & \dddot{y}_3, & \dddot{y}_4-s \end{vmatrix}=0 \tag{5.1}$$

Здесь $y_i(\tau)$ — частные решения уравнения (2.18), принимающие при $\tau=0$ такие значения:

$$y_k^{(n)}(0)=\delta_k^{\,n},\qquad k,n=1,2,3,4 \tag{5.2}$$

Таким образом, задача сводится к численному интегрированию уравнения (2.18) с начальными данными (5.2) и затем к решению алгебраического уравнения (5.1).

Оказывается возможным аналитический подход при $l\gg1$, $n\sim1$ для нахождения характеристического показателя и решения (4.1), соответствующих растущей моде.

Введем обозначение $^{10}/_3 n(n+l+^1/_2)-4=N$. При $n\sim1$, $N\sim l\gg1$ решение (4.1) будем искать в виде

$$Q=\operatorname{const}\exp(\lambda\tau)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_{(m)}(\tau)\right)$$

где $\Phi_{(m)}(\tau)$ — периодические функции τ: $\Phi_{(m)}(\tau+2\pi)=\Phi_m(\tau)$, причем $|\Phi_{(m)}(\tau)|\sim l^{-m/2}$.

Показатель λ будем искать также в виде разложения

$$\lambda=\lambda_n+\sum_{m=0}^{\infty}\varkappa_m \qquad (\varkappa_m\sim l^{-m/2})$$

Здесь λ_n — положительный корень уравнения (3.1). Числа $\varkappa_m$ будем подбирать так, чтобы в выражениях для $\Phi_{(m)}$ не появлялось секулярных членов, линейных по τ. Искомые уравнения для $\varkappa_m$ будем получать интегрированием по периоду уравнения для $\Phi_{(m)}$, которые имеют вид

$$\lambda_n(4\lambda_n^2+2N)\dot{\Phi}_{(m)}+\varkappa_m(4\lambda_n^3+2N\lambda_n)=$$
$$=L_m(\Phi_{(1)},\ldots,\Phi_{(m-1)}\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{m-1},\tau)$$

где L_m — линейный дифференциальный оператор от периодических функций $\Phi_{(1)},\ldots,\Phi_{(m-1)}$ с коэффициентами, представляющими собой полиномы четвертой степени от $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{m-1}$, периодическими по τ. Из требования периодичности $\Phi_{(m)}$ вытекает

$$2\pi(4\lambda_n^3+2N\lambda_n)\varkappa_m=\int_0^{2\pi}L_m\,d\tau$$

Вычисления для $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ дают для них нулевые значения

$$\varkappa_3(4\lambda_n^2+2N)^3=9A^2\lambda_n(2\lambda_n^2+3N)\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\theta}{1+A\cos\theta}\right)^2d\theta$$

Уравнения для $\Phi_{(1)}$ и $\Phi_{(2)}$ имеют вид

$$(4\lambda_n^2+2N)\dot{\Phi}_{(1)}+\frac{3A\cos\tau}{1+A\cos\tau}\lambda_n=0$$

$$(4\lambda_n^3+2N\lambda_n)\dot{\Phi}_{(2)}+(6\lambda_n^2+N)\ddot{\Phi}_{(1)}+\frac{3A\cos\tau}{1+A\cos\tau}\Phi_{(1)}\lambda_n^2=0$$

Итак, при больших l показатель Ляпунова λ для растущей моды возмущений в пульсирующем шаре отличается от соответствующего показателя λ_n для статического случая на величину порядка $l^{-3/2}$.

В заключение отметим, что (как выяснено выше) точное решение с нелинейными пульсациями однородных газовых шаров обладает интересным характером конвективной неустойчивости, сильно растущей при приближении к наружным слоям. Излучение из внутренних слоев (не учитываемое в статье) препятствует тепловому перемешиванию, в результате чего во внутренних слоях режим нелинейных пульсаций может оказаться устойчивым. Указанная неустойчивость, видимо, имеет место лишь вблизи поверхности, в результате чего вокруг пульсирующего шара образуется «корона» турбулеризованного газа.

Автор благодарит Л. И. Седова за ценные замечания.

Поступила 16 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosseland S.* The pulsation theory of variable stars. Oxford, Clarendon Press., 1949. (Рус. перев.: Теория пульсаций переменных звезд. М., Изд-во иностр. лит., 1952.)
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
3. *Lamb G.* Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press., 1932. (Рус. перев.: Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.)
4. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal figure of equilibrium. New Haven – London, Yale U. P., 1969. (Рус. перев.: Эллипсоидальные фигуры равновесия. М., «Мир», 1973.)
5. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
6. *Северный А. Б.,* Об устойчивости вращающегося газового шара. Докл. АН СССР, 1945, т. 46, № 2.
7. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions, vol. 2, McGraw – Hill, 1953. (Рус. перев.: Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.)
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
9. *Kamke E.* Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig, Akaq. Verl.— Ges. Geest und Portig, 1959. (Рус. перев.: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.)