

Максимальное герцево давление p_0 изменялось от $5.5 \cdot 10^8$ н.м⁻² до $1.16 \cdot 10^9$ н.м⁻². Постоянная в контакте толщина пленки определялась по [8]

$$h = 1.65 \left(\frac{E'}{p_0} \right)^{0.18} \left(\frac{\alpha \mu^* u^*}{R} \right)^{0.73} R$$

где μ^* — вязкость при $T=T^*$ и нормальном давлении.

Для данных значений параметров можно пользоваться первой формулой (3.4). Так как $\mu(w_2 - w_1) \gg Gh$ почти для всей зоны контакта и $\beta p_0 \ll 1$, то интегрирование по зоне контакта приводит к формулам для силы трения F и коэффициента трения $f = F/q$, где q — нагрузка на единицу длины цилиндра

$$(4.1) \quad f = \frac{4G}{\pi p_0} \left[\ln 2\Omega + \frac{\pi}{4} \alpha p_0 - \frac{\alpha \beta p_0^2}{2} \right], \quad \Omega = \mu_0 (u_2 - u_1) / \{ Gh [1 + \delta (T^* - T_0)] \}$$

Теоретические и экспериментальные результаты представлены на фиг. 2. Данные I — экспериментальные точки, сплошная линия — теоретическая кривая.

Авторы благодарят В. Д. Данилова и А. И. Петрусевича за предоставленные экспериментальные данные.

Поступила 25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Dowson D., Higginson G. R. *Elasto — hydrodynamic lubrication*. Oxford, Pergamon Press, 1966.
2. Коднир Д. С., Саввин Л. Л. Определение касательных нагрузок и коэффициентов трения для поверхностей, работающих в контактно-гидродинамическом режиме. Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та им. С. П. Королева, 1969, № 40.
3. Каннел, Уолоуит. Упрощенный анализ сил трения при упругогидродинамическом контакте в условиях качения со скальжением. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 1.
4. Белл, Кеннел, Аллен. Реологическое поведение смазки в контактной зоне системы с контактом качения. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Теорет. основы расчетов, 1964, т. 86, № 3.
5. Новак, Винер. Вязкость некоторых смазочных масел при повышенных температурах, высоких давлениях и больших скоростях сдвигов. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Проблемы трения и смазки, 1968, т. 90, № 3.
6. Смит. Некоторые аспекты нелинейного поведения в смазках при сверхвысоком давлении. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Проблемы трения и смазки, 1968, т. 90, № 3.
7. Чжоу, Сэйбел. Упругогидродинамическая теория для вязкоупругой жидкости. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 1.
8. Грубин А. Н. Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей. ЦНИИТМАШ, 1949, кн. 30.

УДК 532.526

О ХАРАКТЕРЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ЕГО НАЧАЛА НА ТЕЛАХ, ВРАЩАЮЩИХСЯ В ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Я. Л. РУДЕРМАН

(Москва)

Развитие пограничного слоя на телах вращения, вращающихся вокруг оси симметрии в покоящейся жидкости, во многом определяется положением его начала по отношению к оси вращения. Если начало пограничного слоя совпадает с полюсом вращающегося тела, то при достаточном общих предположениях относительно формы тела в окрестности полюса пограничный слой имеет ненулевую толщину, а течение в нем описывается тем или иным «автомодельным» решением уравнений пограничного слоя [1, 2]. Применимость существующих приближенных методов расчета пограничного слоя [2, 3] ограничена этим случаем.

Результаты данной работы относятся к случаю, когда пограничный слой берет начало на передней кромке, находящейся на конечном расстоянии от оси вращения. Выявляется характер решения уравнений пограничного слоя вблизи кромки. Вводит-

ся преобразование переменных, приводящее систему уравнений пограничного слоя к удобному для исследования и решения виду. На основе этого преобразования получены «универсальные» уравнения, определяющие локальное поведение пограничного слоя в окрестности его начала в обоих указанных случаях.

1. Решение вблизи передней кромки. Установившийся пограничный слой на телах вращения, вращающихся вокруг оси симметрии в покоящейся вязкой жидкости, описывается следующими безразмерными уравнениями и граничными условиями:

$$(1.1) \quad \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0$$

$$(1.2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$(1.3) \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = r(x) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} u(x, z) = \lim_{z \rightarrow \infty} v(x, z) = 0 \end{aligned}$$

Здесь координата x измеряется вдоль образующей, координата z — расстояние от поверхности тела вдоль внешней нормали; $r(x)$ — радиус поперечного сечения тела; u , w — компоненты скорости в направлениях x и z соответственно; v — поперечная составляющая скорости. Обе координаты и функция r отнесены к некоторому характерному радиусу R . Компоненты скорости отнесены к характерной скорости $R\omega$, где ω — угловая скорость вращения тела. Кроме того, масштабы для нормальной координаты z и нормальной составляющей скорости w умножены на квадратный корень из числа Рейнольдса $Re = \omega R^2/\nu$ (ν — коэффициент вязкости).

Введем функции тока ψ система (1.1)–(1.4) преобразуется к виду

$$(1.5) \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - r^2 \frac{dr}{dx} G^2 = \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}$$

$$(1.6) \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{dr}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial z} G = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

$$(1.7) \quad \psi(x, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) = 0, \quad G(x, 0) = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(x, z) = 0$$

$$G = v/r, \quad ru = \partial \psi / \partial z, \quad rw = -\partial \psi / \partial x$$

Пусть $x=0$ соответствует началу пограничного слоя. Рассмотрим случай, когда $r(0) \neq 0$, $dr(x)/dx > 0$ в некоторой окрестности передней кромки. Предполагается, что в этом случае на кромке пограничный слой имеет нулевую толщину. Представим решение уравнений (1.5), (1.6) в виде

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \psi = \delta^k \Phi(\delta, \mu), \quad G = G(\delta, \mu), \quad \mu = z/\delta(x), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \delta(x) = 0 \end{aligned}$$

Порядок функции $\delta(x)$ при малых x и значение постоянной k определяются в предположении, что функции Φ и G и их производные по μ и δ имеют конечные пределы при $\delta \rightarrow 0$. При подстановке (1.8) в (1.5) можно получить с точностью до членов более высокого порядка малости следующие оценки:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \sim \delta^{k-3}, \quad r^2 \frac{dr}{dx} G^2 \sim 1, \quad \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \sim \delta^{2(k-1)} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \sim \delta^{2k-3} \frac{d\delta}{dx} \end{aligned}$$

Так как перемещение частиц жидкости вдоль поверхности в сторону возрастания r происходит под одновременным воздействием сил вязкости и центробежных сил, то порядки первого и второго членов в (1.9) должны совпадать. Отсюда следует, что $k=3$. Тогда конвективный перенос может быть учтен, если

$$(1.10) \quad \delta(x) \sim x^{1/4}$$

Соотношение (1.10) определяет порядок последнего члена в (1.9).

2. Преобразование переменных. В [1] введено преобразование переменных, которое приводит уравнения (1.5), (1.6) к удобному для анализа виду в случае, когда $r(0)=0$. Для случая, рассмотренного в п. 1, это преобразование непригодно, так как в нем не учтены свойства решения вблизи передней кромки (1.8), (1.10). Введем преобразование, которое учитывает данные свойства, сохраняя при этом основные достоинства преобразования [1]. Положим

$$(2.1) \quad \xi = [r^4(x) - r^4(0)]^{1/4}, \quad \mu = \left(\frac{dr}{dx}\right)^{1/2} \frac{rz}{\xi},$$

$$\psi = \left(\frac{dr}{dx}\right)^{1/2} \frac{\xi^3}{r} \Phi(\xi, \mu), \quad G = G(\xi, \mu).$$

Подстановка (2.1) в (1.5)–(1.7) дает

$$(2.2) \quad \xi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \mu} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2} \right) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \mu^3} + (3 - \gamma_1 - \gamma_2) \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2} -$$

$$-(2 - \gamma_1) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)^2 + G^2$$

$$(2.3) \quad \xi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} + (3 - \gamma_1 - \gamma_2) \Phi \frac{\partial G}{\partial \mu} - 2\gamma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} G$$

$$\gamma_1 = \frac{\xi^4}{r^4}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{dr}{dx}\right)^{-2} \frac{d^2 r}{dx^2} \frac{\xi^4}{2r^3}$$

$$(2.4) \quad \Phi(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(\xi, 0) = 0, \quad G(\xi, 0) = 1$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(\xi, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} G(\xi, \mu) = 0$$

Компоненты скорости u и w связаны с функцией Φ соотношениями

$$u = \frac{\xi^2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}, \quad w = -\frac{r}{\xi} \left(\frac{dr}{dx}\right)^{1/2} \left[\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + (3 - \gamma_1 - \gamma_2) \Phi - \right.$$

$$\left. - (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right]$$

Следует отметить, что при $r(0)=0$ переменная μ в точности совпадает с «автомодельной» переменной [2].

3. Определяющие уравнения. При $\xi=0$ левые части уравнений (2.2), (2.3) обращаются в нуль, что позволяет получить уравнения, определяющие поведение пограничного слоя в окрестности его начала

$$(3.1) \quad \Phi_0''' + (3 - \gamma_{10} - \gamma_{20}) \Phi_0 \Phi_0'' -$$

$$-(2 - \gamma_{10}) \Phi_0'^2 + G_0^2 = 0$$

$$(3.2) \quad G_0'' + (3 - \gamma_{10} - \gamma_{20}) \Phi_0 G_0' -$$

$$- 2\gamma_{10} \Phi_0' G_0 = 0$$

$$\Phi_0(\mu) = \Phi(0, \mu), \quad G_0(\mu) = G(0, \mu),$$

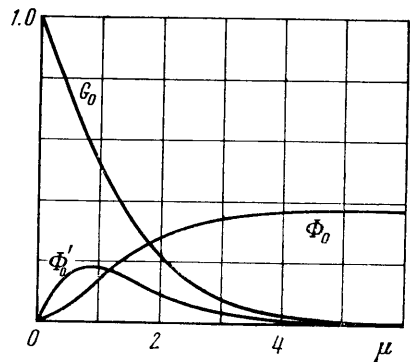
$$\gamma_{10} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \gamma_1, \quad \gamma_{20} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \gamma_2$$

Штрихом обозначено дифференцирование по μ . Граничные условия для уравнений (3.1), (3.2)

$$(3.3) \quad \Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = 0, \quad G_0(0) = 1,$$

$$\Phi_0'(\infty) = G_0(\infty) = 0$$

Если начало пограничного слоя совпадает с полюсом тела, $\xi=r(x)$, $\gamma_1=1$, и если, кроме того, вблизи полюса $r(x) \sim Ax^m$ ($m \geq 1$), то $\gamma_{20} = (m-1)/2m$. Решение задачи (3.1)–(3.3) в этом случае принадлежит классу автомодельных решений уравнений пограничного слоя, указанному в [4]. Результаты численного интегрирования автомодельных уравнений для различных значений m



даны в [2]. Если функция $r(x)$ аналитическая в окрестности полюса, то решение уравнений (2.2), (2.3) можно при малых x представить рядами

$$(3.4) \quad \Phi(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \Phi_n(\mu), \quad G(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n G_n(\mu)$$

К аналогичным результатам приводит преобразование, использованное в [1].

В случае, когда пограничный слой начинается на кромке ($r(0) \neq 0$, $dr(0)/dx > 0$), решение теряет «автомодельный» характер, так как имеет место равенство

$$(3.5) \quad \gamma_{10} = \gamma_{20} = 0$$

Уравнения (3.1), (3.2) с условиями (3.3), (3.5) интегрировались численно методом итераций [3]. Результаты расчетов приведены на фиг. 1. Представляющие наибольший интерес постоянные равны

$$\Phi_0''(0) = 0.52847, \quad G_0'(0) = -0.48444, \quad \Phi_0(\infty) = 0.37601$$

Функции $\Phi_0(\mu)$ и $G_0(\mu)$ не зависят от конкретных значений $r(0)$ и $dr(0)/dx$ и в этом смысле являются универсальными. При аналитической в окрестности нуля функции $r(x)$ решение задачи (2.2)–(2.4) вблизи кромки представимо рядами

$$(3.6) \quad \Phi(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{4n} \Phi_n(\mu), \quad G(\xi, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{4n} G_n(\mu)$$

В заключение отметим, что вид уравнений пограничного слоя (2.2), (2.3) является удобным не только для получения и исследования решения на начальном участке, но и для численного интегрирования во всей области, где $dr/dx > 0$. При этом ряды (3.4) или (3.6) могут быть эффективно использованы на начальной стадии интегрирования, например, так, как были использованы ряды Хуарта [6] при расчете пограничного слоя на вращающейся сфере [7].

Поступила 16 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Боршевский В. Д. О трехмерном осесимметричном проблемме граничного слоя. Матем. вестн., 1969, т. 6, № 2.
2. Дорфман Л. А. Расчет пограничного слоя, образующегося на произвольной осесимметричной поверхности, вращающейся в неподвижной среде. ПМТФ, 1965, № 3.
3. Дорфман Л. А. Скоростной и тепловой пограничные слои на осесимметричном теле, вращающемся в неограниченной неподвижной среде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
4. Гайс Т. Подобные пограничные слои на телах вращения. В сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи». М. — Л., Госэнергоиздат, 1960.
5. Rogers M. H., Lance G. N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt. 4.
6. Howarth L. Note on the boundary layer on a rotating sphere. Philos. Mag., 1951, Ser. 7, vol. 42, No. 334.
7. Manohar R. The boundary layer on a rotating sphere. Z. Angew. Math. und Phys., 1967, vol. 18, Fasc. 3.

УДК 532.528

СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ КЛИНОВИДНОЙ СТОЙКИ, ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

К. В. АЛЕКСАНДРОВ

(Ленинград)

Рассмотрено решение задачи о струйном обтекании тонкой клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность. Определены размеры каверны, возникающей за стойкой, и коэффициент сопротивления. Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными.

При движении тел, пересекающих свободную поверхность воды, может наблюдаться прорыв воздуха в их кормовой части [1]. Это явление особенно ярко проявляется тогда, когда на теле имеются острые кромки, фиксирующие положение точек схода струй. В этом случае образующаяся за телом воздушная каверна имеет