

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В СМЕСИ МАТЕРИАЛОВ.
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Г. А. БОГАЧЕВ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

(Москва)

Формулируются уравнения движения и термодинамики для расчета ударных адиабат смеси конденсированных веществ при весьма высоких давлениях, когда допустимо пренебрегать проявлением прочностных свойств. Используются общие принципы построения моделей взаимонепроницающих сплошных сред [1-3], систематически изложенные в книге [4]. В расчетах введено различие давлений в составляющих материалах смеси. В этой связи рассмотрены: условие пропорционального (по массе) ударного приращения энергии, условие самосогласования требований равенств массовых скоростей и скорости ударной волны в индивидуальных частицах, а также условие пропорциональности давлений в фазах. Проведены численные расчеты для смесей вольфрам — парафин, алюминий — эпоксидная смола. Результаты сравниваются с экспериментальными данными и с расчетами при задании равенства фазовых давлений [5-8], а также с расчетами по «аддитивному правилу» [9-11].

1. Уравнение баланса. Будем считать, как это принято в механике гетерогенных сплошных сред [4], что можно выделить элементарный объем, который настолько мал, что пространственные распределения в нем средних параметров движения удовлетворительно аппроксимируются линейными выражениями, и в то же время настолько велик, что его масштаб гораздо больше масштаба индивидуальных составляющих разнородных частиц (зерен, пор, включений и промежутков между ними).

Для простоты ограничимся случаем двух материалов (фаз). Пусть средняя скорость первой фазы $u_i(x, t)$, а второй $w_i(x, t)$. Примем гипотезу о равномерности распределения масс фаз по элементарному объему, что приводит к условию совпадения центров масс обеих фаз. Средние плотности будем обозначать как ρ_1 и ρ_2 , а объемную концентрацию первой фазы — через m . (Если вторая фаза представляет собой «матрицу», а первая — «включения», пустые или заполненные газом, то m — пористость.)

Уравнения балансов массы и импульса двухфазной среды имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_1 m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 m u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2 (1-m)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 (1-m) w_i}{\partial x_i} = 0$$

$$(1.2) \quad m \rho_1 \frac{d_1 u_i}{dt} = - \frac{\partial m p_1}{\partial x_i} + F_i, \quad (1-m) \rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = - \frac{\partial (1-m) p_2}{\partial x_i} - F_i$$

где p_1, p_2 — давления в первой и второй фазах соответственно, F_i — сила межфазного взаимодействия, $d_1/dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i, \dots$, причем для среднего давления p , действующего на произвольной площадке среды, справедливо равенство

$$(1.3) \quad p = m p_1 + (1-m) p_2$$

Уравнения баланса полной энергии фаз

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \rho_1 \left(\epsilon_1 + \frac{u_i^2}{2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ m \rho_1 \left(\epsilon_1 + \frac{u_i^2}{2} \right) u_j + m p_1 u_j \right\} + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1-m) \rho_2 \left(\epsilon_2 + \frac{w_i^2}{2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (1-m) \rho_2 \left(\epsilon_2 + \frac{w_i^2}{2} \right) w_j + (1-m) p_2 w_j \right\} + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial t} - q = 0$$

Здесь ϵ_k — внутренняя энергия k -й фазы, $\partial P^{(k)} / \partial t$ — работа на межфазовой границе раздела, совершаемая над k -й фазой, q — теплообмен между фазами.

2. Конкретизация межфазового взаимодействия. Заметим предварительно, что в случае двухжидкостного потока, когда для каждой жидкости имеется своя система каналов, уравнения импульса должны быть симметричны и иметь вид

$$(2.1) \quad m \rho_1 \frac{d_1 u_i}{dt} = -m \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + R_i, \quad (1-m) \rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = -(1-m) \frac{\partial p_2}{\partial x_i} - R_i$$

где R_i — осредненная сила вязкого сопротивления (зависящая от относительной скорости движения фаз $u_i - w_i$). При этом движение каждой из фаз при $R_i = 0$ описывается уравнением, справедливым вдоль ее линии тока (канала). С другой стороны, уравнение импульса для среды в целом должно иметь вид

$$(2.2) \quad m \rho_1 \frac{d_1 u_i}{dt} + (1-m) \rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

где p определено формулой (1.3). Из сравнения уравнений (2.1) и (2.2) видно, что для двухжидкостной системы с равноправными системами каналов характерно наличие третьей поверхностной фазы (типа поверхностного межфазового слоя Гиббса), на которую со стороны разделенных фаз действует нормальная сила

$$(2.3) \quad N_i = -p_1 \frac{\partial m}{\partial x_i} - p_2 \frac{\partial (1-m)}{\partial x_i} = (p_2 - p_1) \frac{\partial m}{\partial x_i}$$

Если фазовые давления равны [5], эта сила обращается в нуль, но в общем случае $p_1 \neq p_2$, $N_i \neq 0$; она должна быть уравновешена усилиями (движениями) в поверхностном слое.

Если движения поверхностной фазы ассоциированы, например, с движением второй фазы, то прибавление (2.3) ко второму из уравнений (2.1) приводит к следующему уравнению импульсов:

$$(2.4) \quad (1-m) \rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = -\frac{\partial (1-m) p_2}{\partial x_i} - R_i + p_1 \frac{\partial (1-m)}{\partial x_i}$$

Присоединение поверхностного слоя к одной из объемных фаз приводит тем самым к нарушению симметрии уравнений движения: вторая фаза становится характерной фазой «матрицы», а первая — фазой «включений».

Сравнение уравнений импульсов для второй фазы из (2.1) и (2.6) приводит к результату

$$(2.5) \quad F_i = R_i + p_1 \partial m / \partial x_i$$

согласующемуся с введением сил взаимодействия в случае твердой матрицы и насыщенных жидкостью пор [4].

Будем отождествлять поверхностный слой с той окрестностью вокруг включения, в которой происходит дополнительное (к среднему поступательному) движение, обусловленное расширением включения, уменьшением его объема (например, схлопывания пузыря или затекания поры) и т. п. Кроме того, разность фазовых давлений p_1, p_2 следующим образом определяет эффективное давление p' :

$$(2.6) \quad p' = (1-m)(p_2 - p_1) = p - p_1$$

Таким образом, уравнения движения фаз принимают вид

$$(2.7) \quad m\rho_1 \frac{d_1 u_i}{dt} = -m \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + R_i,$$

$$(1-m)\rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} - (1-m) \frac{\partial p_1}{\partial x_i} - R_i$$

Что касается энергетического взаимодействия фаз, то примем для интенсивности межфазовых работ гипотезу

$$(2.8) \quad \frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} = p_1 \frac{\partial m}{\partial t} + (1-\beta)R_i w_i + \beta R_i u_i,$$

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial t} = p_2 \frac{\partial(1-m)}{\partial t} - (1-\beta)R_i w_i - \beta R_i u_i$$

$$(2.9) \quad \partial P^{(1)} / \partial t + \partial P^{(2)} / \partial t = -\partial P^{(12)} / \partial t = (p_2 - p_1) \partial m / \partial t$$

где $\partial P^{(12)} / \partial t$ — интенсивность работы, совершаемой над поверхностной фазой (β — некоторый распределительный коэффициент).

Если использовать теперь определения (2.8) в уравнениях (1.3), кроме того, учитывать включение поверхностного слоя во вторую фазу (матрицу), прибавить работу $\partial P^{(12)} / \partial t$ согласно (2.9) ко второму уравнению (1.3), то получим окончательно уравнения для полной энергии первой фазы (включений) и второй (матрицы) в виде

$$(2.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u_i^2}{2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ m\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u_i^2}{2} \right) u_j + m p_1 u_j \right\} +$$

$$+ p_1 \frac{\partial m}{\partial t} + (1-\beta)R_i w_i + \beta R_i u_i + q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1-m)\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{w_i^2}{2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (1-m)\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{w_i^2}{2} \right) w_j + \right.$$

$$\left. + (1-m)p_2 w_j \right\} + p_1 \frac{\partial(1-m)}{\partial t} - (1-\beta)R_i w_i - \beta R_i u_i - q = 0$$

Уравнения баланса кинетической энергии фаз, получаемые путем умножения уравнений движения (2.7) на скорости u_i, w_i соответственно, имеют вид

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(m\rho_1 \frac{u_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m\rho_1 \frac{u_i^2}{2} u_j \right) = -u_i \frac{\partial m p_1}{\partial x_i} + R_i u_i + p_1 u_i \frac{\partial m}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 (1-m) \frac{w_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((1-m)\rho_2 \frac{w_i^2}{2} w_j \right) =$$

$$= -w_i \frac{\partial(1-m)p_2}{\partial x_i} - R_i w_i + p_2 w_i \frac{\partial(1-m)}{\partial x_i}$$

3. Термодинамика и уравнения состояния. Вычитая уравнения (2.11) из уравнений (2.10), для полной энергии фаз получим уравнения притока тепла в фазы

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho_1 m \frac{d_1 \varepsilon_1}{dt} + p_1 m \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + p_1 \frac{d_1 m}{dt} &= (1 - \beta) R_i (w_i - u_i) + q \\ \rho_2 (1 - m) \frac{d_2 \varepsilon_2}{dt} + p_2 (1 - m) \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + p_1 \frac{d_2 (1 - m)}{dt} &= \beta R_i (w_i - u_i) - q \end{aligned}$$

Воспользовавшись для дальнейших преобразований уравнениями неразрывности (1.1), например

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \frac{d_1 m}{dt} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d_1 \rho_1}{dt}$$

преобразуем уравнения (3.1) к виду

$$(3.2) \quad \begin{aligned} m \rho_1 \left(\frac{d_1 \varepsilon_1}{dt} - p_1 \frac{1}{\rho_1^2} \frac{d_1 \rho_1}{dt} \right) &= (1 - \beta) R_i (w_i - u_i) + q \\ (1 - m) \rho_2 \left(\frac{d_2 \varepsilon_2}{dt} - p_2 \frac{1}{\rho_2^2} \frac{d_2 \rho_2}{dt} \right) - (p_2 - p_1) \frac{d_2 (1 - m)}{dt} &= \beta R_i (w_i - u_i) - q \end{aligned}$$

Выделим теперь энтропии s_1, s_2 фаз согласно равенствам

$$(3.3) \quad \begin{aligned} T_1 \rho_1 m \frac{d_1 s_1}{dt} &= q + (1 - \beta) R_i (w_i - u_i), \\ T_2 \rho_2 (1 - m) \frac{d_2 s_2}{dt} &= -q + \beta R_i (w_i - u_i) \end{aligned}$$

что соответствует предположению, что к росту энтропии фаз приводят теплообмен q , вся работа силы R_i на относительных скоростях.

Тогда соотношения Гиббса для фаз имеют вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{d_1 \varepsilon_1}{dt} - p_1 \frac{1}{\rho_1^2} \frac{d_1 \rho_1}{dt} &= T_1 \frac{d_1 s_1}{dt} \\ \frac{d_2 \varepsilon_2}{dt} - p_2 \frac{1}{\rho_2^2} \frac{d_2 \rho_2}{dt} - \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 (1 - m)} \frac{d_2 (1 - m)}{dt} &= T_2 \frac{d_2 s_2}{dt} \end{aligned}$$

Можно ввести также удельные объемы фаз V_i и всей среды в целом V

$$(3.5) \quad V_i = 1 / \rho_i, \quad V = 1 / [m \rho_1 + (1 - m) \rho_2]$$

Тогда соотношения (3.4) переписутся в виде

$$(3.6) \quad \begin{aligned} d_1 \varepsilon_1 + p_1 d_1 V_1 &= T_1 ds_1, \\ d_2 \varepsilon_2 + p_2 d_2 V_2 + \frac{p^f}{\rho_2} d_2 \alpha &= T_2 ds_2, \quad \alpha = (1 - m)^{-1} \end{aligned}$$

Согласно (3.6) имеем следующее уравнение состояния для первой фазы:

$$(3.7) \quad p_1 = \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial V_1} \right)_{s_1 = \text{const}} = p_1(\rho_1, E_1)$$

Будем считать, что связь (3.7) такая же, как и в монолитном состоянии этой фазы, т. е. $\varepsilon_1 = E_1$, где E_1 — внутренняя энергия единицы массы материала первой фазы.

Что касается второй фазы, то примем, что $\varepsilon_2 = E_2(V_2, s_2) + E(\alpha)$, а по-
тому

$$(3.8) \quad p_2 = (\partial \varepsilon_2 / \partial V_2)_{s_2, m} = (\partial E_2 / \partial V_2)_{s_2, m} = p_2(V_2, \varepsilon_2)$$

Таким образом, принимаем, что давление p_2 связано с внутренней энергией E_2 и удельным объемом V_2 так же, как и в сплошном материале этой фазы. Предположение (3.8) обычно в механике гетерогенных сред [4].

Кроме того, относительно связи

$$(3.9) \quad p^f = \rho_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} \right)_{s_2, V_2} = \rho_2 \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)_{s_2, V_2}$$

примем предположение, что она в свою очередь определяется только пористостью среды

$$(3.10) \quad p^f = g(m)$$

что также соответствует [4].

Отметим, что в случае пористых материалов при $p_1 = 0$, $\rho_1 = 0$ второе соотношение (3.6) может быть приведено к виду

$$(3.11) \quad d\varepsilon_2 + p_2(1-m)dV_2 = T_2 ds_2, \quad V_2 = (1-m)^{-1} \rho_2^{-1}$$

Отсюда, вообще говоря, можно искать в экспериментах единую связь

$$p = p_2(1-m) = (\partial \varepsilon_2 / \partial V_2)_{s_2}$$

включающую в себя эффекты изменения пористости и плотности.

Полезно упомянуть, что термодинамический анализ с заданием работы межфазового взаимодействия для сжимаемых фаз был выполнен впервые для пористых насыщенных сред, см. [4], а позднее в работах [12, 13].

4. Замыкающие соотношения. В качестве соотношений (3.7) и (3.8) возьмем соответственно уравнения

$$(4.1) \quad E_1 = X_1(V_1) + V_1(p_1 - p_1^x) / \Gamma_1(V_1), \quad E_2 = X_2(V_2) + V_2(p_2 - p_2^x) / \Gamma_2(V_2)$$

где $X_i(V_i)$, p_i^x — холодные энергии и давления фаз, Γ_i — коэффициенты Грюнайзена, причем

$$(4.2) \quad p_i^x = -\partial X_i / \partial V_i, \quad i = 1, 2$$

Холодное давление зададим в виде

$$(4.3) \quad p_i^x = p_i^H - \Gamma(V_i) (\varepsilon_i^H - \varepsilon_i^x(V_i)) V_i^{-1}$$

$$p_i^H = a^2 (V_{i0} - V_i) / [V_{i0} - b(V_{i0} - V_i)]^2, \quad \varepsilon_H = 1/2 p_H (V_{i0} - V_i)$$

соответствующем известной линейной зависимости $U = a + bu$, где U — скорость ударной волны, u — массовая скорость, индекс H соответствует адиабате Гюгонио материала в монолитном состоянии. Значения основных характеристик для вольфрама таковы:

Материал	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$a, \text{км/сек}$	b	Γ_0	Литература
W	19.35	4.00	1.285	1.54	[10, 11, 15]

Для алюминия и эпоксидной смолы будем использовать [7] вместо (4.3) полиномиальное представление

$$(4.4) \quad p_i^x = C\mu_i + D\mu_i^2 + S\mu_i^3, \quad \mu_i = V_{i0} / V_i - 1$$

где коэффициенты C, D, S имеют следующие значения:

Материал	$C, \text{Мбар}$	$D, \text{Мбар}$	$S, \text{Мбар}$	Γ_0	$\rho_0, \text{г/см}^3$	Литература
Al	0.764888	0.778860	-1.19871	2.13	2.785	[7, 14]
Эпоксидная смола	0.098842	0.059183	0.16653	0.79	1.190	[7]

Удельную энергию холодного сжатия будем вычислять по формуле

$$(4.5) \quad X_i(V_i) = - \int_{V_{i0}}^{V_i} p_i^x(V_i) dV_i$$

соответствующей соотношению (4.2), а коэффициент Грюнайзена будем задавать в виде (см. приведенные ранее данные)

$$(4.6) \quad \Gamma_i(V_i) = \Gamma_{i0} V_i / V_{i0}$$

Переходя к связи (3.10), прежде всего отметим, что во многих более ранних работах по ударным волнам в суспензии (двухфазном материале) принималась гипотеза о равенстве фазовых давлений [1, 4-12, 16-18]. В работе [17] (см. также [4]) использовалась подобная модель для оценки структуры ударной волны в гетерогенных средах (причем были использованы связи $q = \eta(T_2 - T_1)$, $R_i = k_1(w_i - u_i) + b_1|w_i - u_i|(w_i - u_i)$, где η , k_1 , b_1 — коэффициенты пропорциональности, следующие из формализма термодинамики необратимых процессов). Анализ задачи о структуре ударной волны в той же постановке позднее проводился также в работе [18].

Неравенство фазовых давлений можно связывать с двумя эффектами — либо с жесткостью материалов фаз (и это больше всего соответствует приведенным выше построениям), либо с инерцией особого движения в окрестности инородных включений. Упругие деформации матрицы насыщенной пористой среды в этой связи рассматривались в [4]. В [19] предлагается использовать в качестве функции $g(m)$ кривую необратимого объемного сжатия, определяемую непосредственно в экспериментах (динамических) с твердым пористым материалом, при которых происходит необратимое схлопывание пор. В серии работ (см. [20, 21]) рассматривалась упругопластическая задача о затекании сферической полости, причем учитывались инерционные силы, проявляющиеся при динамическом схлопывании пор.

С точки зрения теории взаимопроникающих континуумов пульсационным течением в окрестности газовых пузырьков в жидкости при распространении в ней ударной волны [22-24] соответствует эффективное различие средних фазовых давлений (например, газа в пузырьке и жидкости вдали от него). Отметим, что в этом случае характерна неравновесность на микроуровне в смеси, а потому вместо конечной связи (3.9) следует вводить дифференциальное уравнение (пульсации пузырька). Непосредственный расчет [25] распространения ударной волны по материалу с отдельными включениями (цилиндрические и конические поры или же алюминиевые сферы и цилиндры в нитрометане) наиболее точен и показывает, что при переходе из материала матрицы в материал включения согласованно меняются амплитуда давления, массовая скорость и скорость самой ударной волны (согласно известным правилам сшивания решений). При использовании приводимой здесь теории многофазных сред приходится подбирать разницу фазовых давлений по экспериментальным данным в согласии с обычными гипотезами о распространении фронта ударной волны в смеси материалов как по сплошной среде.

5. Общие соотношения на разрывах. Будем искать решения системы уравнений (1.1), (2.7), (2.10) типа одномерной плоской бегущей волны, т. е. зависящей только от одной переменной $\xi = x - Ut$. Тогда будут справедливы интегралы сохранения массы каждой из фаз и суммарных импульсов и энергий

$$(5.1) \quad \rho_1 m (u - U) = M_1, \quad \rho_2 (1 - m) (w - U) = M_2$$

$$(5.2) \quad \rho_1 m (u - U)^2 + \rho_2 (1 - m) (w - U)^2 + m p_1 + (1 - m) p_2 = Q$$

$$(5.3) \quad M_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u^2}{2} \right) + M_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{w^2}{2} \right) + m p_1 u + (1 - m) p_2 w = W$$

где M_1 , M_2 , Q , W — постоянные. Уравнения баланса импульса и полной энергии для первой фазы (матрицы) при этом сводятся к виду

$$(5.4) \quad \frac{d}{d\xi} \{ M_1 u + m p_1 \} - p_1 \frac{dm}{d\xi} = R$$

$$(5.5) \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ M_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u^2}{2} \right) + m p_1 u \right\} - p_1 U \frac{dm}{d\xi} + (1 - \beta) R w + \beta R u + q = 0$$

Умножим (5.4) на U и вычтем из уравнения (5.5). Тогда получим

$$(5.6) \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ M_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u^2}{2} \right) - M_1 u U + m p_1 (u - U) \right\} + R \{ U + (1 - \beta) w + \beta u \} + q = 0$$

Будем предполагать, что во всей области движения функции u, w, q, R, \dots ограничены, но производные от них могут быть бесконечно велики при некотором фиксированном значении координаты ξ , т. е. величины u, w, q, R, \dots претерпевают в этой точке скачком конечное изменение. Значение всех величин перед скачком (соответствующим фронту ударной волны) обозначим индексом 0, а относительные скорости — звездочкой: $u_* = u - U, w_* = w - U$. Тогда интегралы (5.1), (5.2) записываются в виде

$$(5.7) \quad \rho_1 m u_* = \rho_{10} m_0 u_{*0} = M_1, \quad \rho_2 (1 - m) w_* = \rho_{20} (1 - m_0) w_{*0} = M_2$$

$$(5.8) \quad M_1 u_* + M_2 w_* + m p_1 + (1 - m) p_2 = \\ = M_1 u_{*0} + M_2 w_{*0} + m_0 p_{10} + (1 - m_0) p_{20} = Q$$

Интеграл (3.3) с учетом (3.8) представляется как

$$(5.9) \quad M_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u_*^2}{2} \right) + M_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{w_*^2}{2} \right) + m p_1 u_* + (1 - m) p_2 w_* = \\ = M_1 \left(\varepsilon_{10} + \frac{u_{*0}^2}{2} \right) + M_2 \left(\varepsilon_{20} + \frac{w_{*0}^2}{2} \right) + m_0 p_{10} u_{*0} + (1 - m_0) p_{20} w_{*0} = W$$

Если выделить слой малой ширины $2h$, включающий в себя ударный переход, проинтегрировать по нему уравнения (5.4) и (5.6), а затем перейти к пределу, то получим

$$(5.10) \quad M_1 u + m p_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h p_1 \frac{dm}{d\xi} d\xi + M_1 u_0 + m_0 p_0$$

$$(5.11) \quad M_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u_*^2}{2} \right) + m p_1 u_* = M_1 \left(\varepsilon_{10} + \frac{u_{*0}^2}{2} \right) + m_0 p_{10} u_{*0} = W_1$$

Таким образом, сохранение импульса фаз не приводится к алгебраическому соотношению между значениями переменных перед и за скачком, а потому для получения значений фазовых давлений, скоростей, температур и пористости за фронтом необходимо рассматривать структуру скачка. Исключение составляет случай умеренно сильных ударных волн, когда можно пренебречь температурными изменениями плотностей [4].

6. Условие равенства скоростей. За указанным выше первым скачком следует зона релаксации¹, связанная с выравниванием фазовых параметров. Предположим, что фазовые скорости выравниваются быстрее, чем остальные параметры. Тогда, если сравнивать состояние в сечении, где выполнено условие равенства скоростей

$$(6.1) \quad u_* = w_*$$

и первоначальное состояние покоя, то можно пользоваться системой интегралов (5.7) — (5.9), (5.11), которые справедливы всюду за первым скачком, и равенством (6.1) — последнее вместо соотношения (5.10). Из условия (6.1) согласно (5.7) следуют соотношения для массовых концентраций

¹ Для умеренно сильных ударных волн в водонасыщенном песке [4] удается провести оценку соответствующей зоны релаксации, где выравниваются фазовые скорости.

и для удельных объемов фаз V_i и всей среды в целом:

$$(6.2) \quad c_1 = \frac{m\rho_1}{m\rho_1 + (1-m)\rho_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} = \text{const},$$

$$c_2 = \frac{(1-m)\rho_2}{m\rho_1 + (1-m)\rho_2} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = \text{const}$$

$$(6.3) \quad V = c_1 V_1 + c_2 V_2 = \frac{1}{m\rho_1 + (1-m)\rho_2}$$

Если выполнены условия $u_0 = w_0 = 0$, т. е. $u_{*0} = w_{*0} = -U$, то связи (5.7) и (5.8) приводятся к виду

$$(6.4) \quad \frac{u_*}{V} = -\frac{U}{V_0}, \quad \frac{u_*^2}{V} + p = \frac{U_2}{V_0} + p_0$$

Соотношения (6.4) могут быть преобразованы к виду

$$(6.5) \quad u_*^2 = V^2 \frac{p - p_0}{V_0 - V}, \quad U^2 = V_0^2 \frac{p - p_0}{V_0 - V}$$

обычному для ударных волн в материалах, но включающему в себя средние удельный объем и давление. После введения массовых концентраций c_1, c_2 соотношения (5.9), (5.11) принимают вид

$$(6.6) \quad \sum_{i=1,2} c_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i0}) = 1/2 (p + p_0) (V_0 - V)$$

$$(6.7) \quad \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} = 1/2 (p - p_0) (V + V_0) - (p_i V_i - p_{i0} V_{i0}), \quad i = 1, 2$$

7. Разница фазовых давлений. Предположим, что в опытах по ударному сжатию смесей [9, 10] измерения проводятся в сечении, где выполнено условие (6.1). Тогда для замыкания системы соотношений (6.5) — (6.7) нужна еще одна дополнительная связь. С этой целью рассмотрим предварительно следующие гипотезы.

а) Пусть по смеси распространяется ударная волна с одной скоростью U при равенстве массовых скоростей фаз $u = w$. Это может происходить при реализации механизма самосогласования, обеспечивающего распространение ударной волны и в индивидуальных частицах каждой из фаз с теми же скоростями U и u . По отдельной частице ударная волна идет как по сплошному материалу, а поэтому для нее справедливо следующее соотношение:

$$(7.1) \quad p_i = \rho_i^{\circ} u U + p_{i0} \approx \rho_i^{\circ} u U$$

Отсюда распределение фазовых давлений в условиях равенства скоростей U и u в фазах удовлетворяет условию

$$(7.2) \quad p_1 = K p_2, \quad K = V_2^{\circ} / V_1^{\circ}$$

пропорциональности фазовых давлений за фронтом.

б) Пусть распределение энергий ударного сжатия по фазам пропорционально их массовому содержанию, т. е. выполнены равенства

$$(7.3) \quad \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} = 1/2 (p + p_0) (V_0 - V), \quad i = 1, 2$$

Условия (7.3) согласуются с интегралами для энергий (6.6), (6.7), если одновременно выполнено равенство $p_1 V_1 - p_{10} V_{10} = p V - p_0 V_0$, что для сильных ударных волн ($p_i \gg p_{i0}$) означает $p_1 V_1 = p V$, или

$$(7.4) \quad p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Интересно отметить близость условий (7.2) и (7.4). Условиям (7.3), (7.4) соответствует согласно (4.1) следующее выражение для среднего давления на ударной адиабате:

$$(7.5) \quad p = [(h_i - 1)p_i^x(V_i) - 2X_i(V_i)V_i^{-1}][VV_i^{-1}h - V_0V_i^{-1}]^{-1}, \\ h_i = 1 + 2/\Gamma_i$$

в) Пусть $p_1 = p_2 = p$, что является частным случаем условия (7.2) при $K=1$. Подобный вариант расчета рассматривался в работах [5-8].

г) Пусть ударное сжатие материалов каждой из фаз в смеси происходит так же, как и в ее монолитном состоянии. Это означает справедливость условий

$$(7.6) \quad \varepsilon_i - \varepsilon_{i0} = 1/2(p_i + p_{i0})(V_{i0} - V_i), \quad i=1, 2$$

которые согласуются с балансом суммарной энергии (6.6), если $p_i = p$. Подобный вариант расчета был развит в работах [9-11] и носит название правила аддитивности (адиабата Гюгонно для смеси является суммой ударных адиабат фаз в монолитном состоянии).

Укажем, что условие (7.6) и условие (6.7) противоречат друг другу.

8. Ударное сжатие пористых материалов. Рассмотрим в этой связи пористый материал с пустыми порами. Его можно считать смесью, одна из фаз которой практически не обладает массой $\rho_{10} = \rho_1 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$, следовательно

$$(8.1) \quad c_1 V_1 = m/(1-m)\rho_2, \quad V = 1/(1-m)\rho_2 = V_2/(1-m)$$

Положим, что давление в порах p равно нулю. Тогда в выражении для ударного приращения внутренней энергии

$$(8.2) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_{20} = 1/2(p + p_0)(V_0 - V)$$

должно фигурировать давление $p = (1-m)p_2$. Только в случае полного закрытия пор $m=0$ за скачком выполнено условие $p=p_2$. Заметим также, что рассмотренные в п. 7 варианты а) (условие (7.2)) и б) (условие (7.4)) в предельном случае пористого материала $p_1=0$, $\rho_1=0$ приводят к уравнению (8.2). Адиабата Гюгонно для пористого материала имеет вид

$$(8.3) \quad p = (1-m)p_2 = [(h-1)p_2^x(V_2) - 2X_2(V_2)V_2^{-1}][h - V_0/V]^{-1}(1-m) \\ V_0/V = \rho_2(1-m)\{\rho_2^0(1-m_0)\}^{-1}$$

Отсюда видно, что расчет ударных адиабат пористых материалов замкнут, только если пористость за фронтом $m=0$ и $V=V_2$. Если же за фронтом $m \neq 0$, то давление p_2 и удельный объем V_2 не совпадают со средними значениями p и V и необходимо определять значение пористости за фронтом ударной волны. Поэтому в общем случае нужно вводить в анализ динамику схлопывания пор, как это предполагалось, например, в статьях [20, 21]. Там отмечалось, в частности, наличие характерного порового давления для развития пластического течения материала в пору (ср. с экспериментом [26]).

В монографии [27], а также в статьях [19, 28] среднее давление $p = (1-m)p_2$ и фазовое давление p_2 не различались. В [29] отмечена эта неточность в работе [19] (которая, впрочем, не повлекла за собой ошибок в окончательных результатах, так как погасалась использованием того же давления в соотношениях на разрыве).

При варианте расчета в) из п. 7 предельный переход к пористому (ненасыщенному) материалу проводился [5] за счет $\rho_1 \rightarrow 0$ (давление в порах неявно сохранялось равным давлению в твердой матрице). При этом вместо (8.2) получается следующая формула:

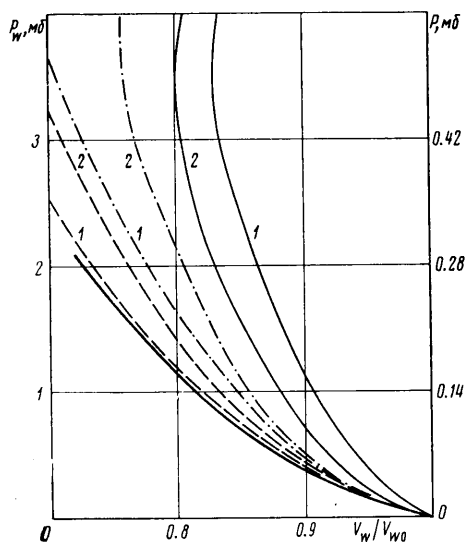
$$(8.4) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_{20} = 1/2p(V_0 - V) + mpV$$

которая совпадает с (8.2) только при $m=0$ за фронтом ударной волны.

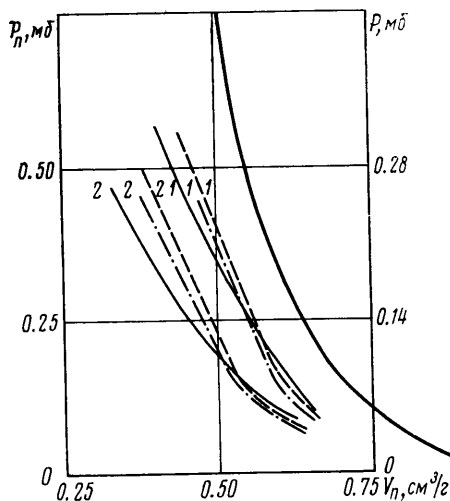
Наконец, расчет по аддитивному [9-11] правилу (вариант г) п. 7) в предельном случае пористого материала сохраняет для ударного сжатия материала матрицы ту же адиабату Гюгонно, что и для монолитного материала, а это противоречит эксперименту [28, 30] и его обработке по формуле (8.3) при $m=0$.

Поэтому из указанных выше вариантов предпочтение следует отдать вариантам а) и б).

9. Результаты расчетов и их обсуждение. Учитывая гипотетичность вариантов а) и б), будем проводить также обработку опытных данных по варианту а), но рассматривать параметр K как неопределенный и варьировать его значение. Тогда случай $K=1$ будет соответствовать варианту в).



Фиг. 1



Фиг. 2

Характерным для подобных расчетов будет то, что при ударном сжатии смеси материалов каждый из составляющих материалов сжимается вдоль адиабаты, отличной от адиабаты для его монолитного состояния. В этом принципиальное отличие развиваемого здесь подхода и «аддитивного» правила.

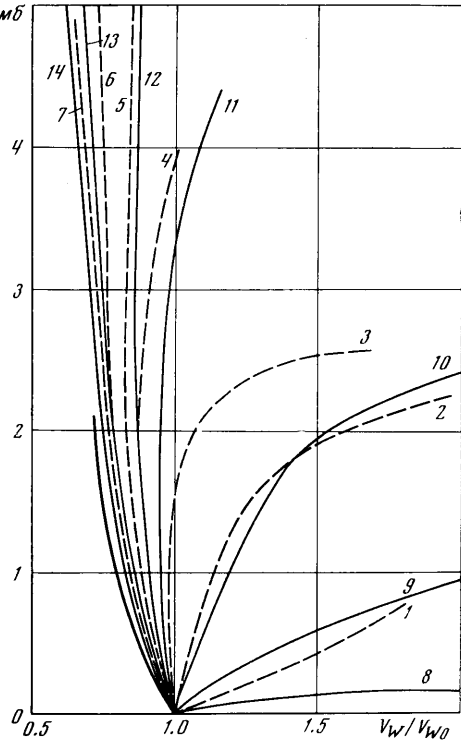
В литературе [8, 10] особо обсуждались опыты по ударному сжатию смеси экстремально различных материалов — частиц вольфрама в парафине. Оказалось [10], что аддитивное правило соответствует экспериментальной ударной адиабате смеси. Расчеты [8], в которых применялись уравнения (6.5)–(6.7), совместно с гипотезой $p_1 \equiv p_2 \equiv p$ также удовлетворительно соответствовали адиабате смеси, но адиабаты фаз резко отклонялись от адиабат материалов фаз в монолитном состоянии. При этом, однако, в вольфрам уходило слишком много ударной энергии, так что при относительно слабом сжатии внутренняя энергия парафина после удара даже убывала. Отметим, что можно добиться положительного приращения энергии парафина, если вводить разницу $p_1 - p_2$, обусловленную прочностными свойствами вольфрамовой частицы, но оказалось, что прочность вольфрама при этом должна иметь порядок своего теоретического, а не технического значения.

На фиг. 1 приведены адиабаты вольфрама в монолитном состоянии (сплошная жирная линия), а также полученные расчетным путем адиабаты вольфрама в смеси с парафином (для концентраций вольфрама по массе $c_w=0.662$ (кривые 1) и $c_w=0.840$ (кривые 2)); использовались координаты: фазовое давление — удельный объем. Кроме того, на шкале справа дано среднее давление p в смеси. Штрихпунктирными линиями здесь изображены адиабаты, соответствующие гипотезе (вариант б)) о распределении ударной энергии по фазам пропорционально их массовому содержанию. Пунктиром даны положения адиабаты фаз тех же смесей, но при условии (вариант а)) пропорциональности (при $K=V_2^0/V_1^0$) фазовых давлений в сечении замера.

На фиг. 2 изображены соответствующие адиабаты парафина (для $C_w=0.662$ (кривые 1) и $C_w=0.84$ (кривые 2)). (В этих расчетах, как и в

работе [8], ударная адиабата смеси [10] считалась заданной; также считалось известным уравнение состояния вольфрама (см. п. 4)). В обоих этих вариантах расчета приращение внутренней энергии парафина было положительным. Однако адиабаты вольфрама в этих случаях, как в варианте в) ($p_1=p_2$ [8]), при концентрации $c_w=0.662$ отклоняются от адиабат монолитного состояния относительно меньше, чем адиабаты при концентрации $c_w=0.840$. На самом же деле порядок отклонений должен быть обратный, такой же как для парафина (фиг. 2).

В связи с этим были проведены расчеты по варианту а) при условии пропорциональности давления в вольфраме и парафине $p_w=Kp_n$, но для набора значений K (фиг. 3, 4). Оказалось, что при значениях $K \geq 3$ чем больше концентрация парафина его адиабаты в смеси от адиабаты монолитного состояния. В то же время для вольфрама этот порядок соблюдается при значениях $K \leq 10$ (фиг. 3) (на фиг. 3, 4 адиабата монолита — сплошная жирная линия, $c_w=0.662$ — сплошная линия, $c_w=0.840$ — пунктир; кривые 1—7 и 8—14 получены соответственно при $K=1, 3, 5, 8, 10, 15, 20$). Зависимость расчетного приращения внутренней энергии парафина от задания параметра K приведена на фиг. 5 для $c_w=0.662$ (сплошные кривые) и для $c_w=0.840$ (пунктирные кривые). Цифрами 1, 2, 3 обозначены кривые, соответствующие средним в смеси давлениям сжатия $p=0.231, 0.5; 0.574$ Мбар ($c_w=0.662$) и $p=0.31, 0.656, 0.816$ Мбар ($c_w=0.84$). Отсюда видно, что положительные приращения энергии парафина ϵ_n соответствуют значениям $K \geq 10$. Поэтому в окончательном расчет-



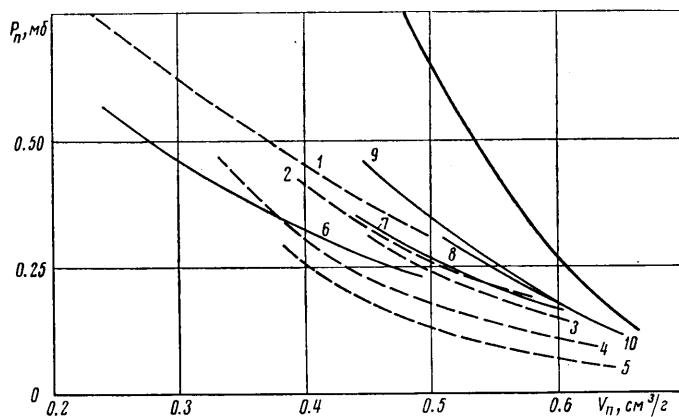
Фиг. 3

Объем Al, %	p, Мбар	Удельный объем смеси V, см ³ /г			
		Эксперимент	$p_1=p_2$	$p_1V_1=p_2V_2$	Аддитивный расчет
25	0.242	0.410	0.406	0.403	0.407
40	0.281	0.374	0.368	0.364	0.367
60	0.328	0.330	0.328	0.324	0.330

ном варианте было принято значение $K=10.15$. Соответствующие ударные адиабаты для вольфрама и парафина приведены на фиг. 1 и 2 тонкими сплошными линиями. Таким образом, давления в вольфраме в 10 раз превышают давления в парафине и среднее ударное давление смеси (сп. шкалы слева и справа).

Неравенство фазовых давлений носит неравновесный характер и возможно является косвенным отражением изменения амплитуд волн при переходе ударной волны из частицы одной фазы в частицу другой, ср. [25].

В таблице приведены результаты расчетов для смеси алюминий — эпоксидная смола. В случае этой смеси (более близких материалов) все мето-

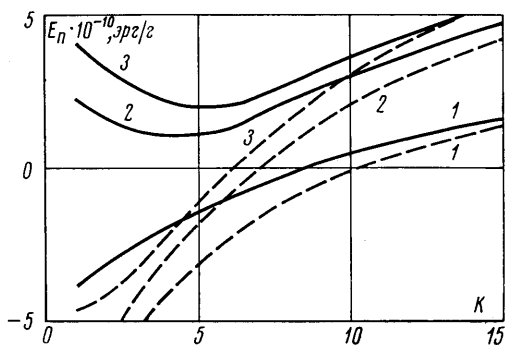


Фиг. 4

ды расчета адиабаты смеси (включая аддитивное правило) дают удовлетворительные результаты.

Прямым экспериментальным доказательством ухода адиабат фаз от адиабат монолитного состояния могут служить различия точек фазовых переходов (изломов адиабаты смеси) на плоскости pV при различных начальных концентрациях.

Известно, что при ударном сжатии графит переходит в алмаз. При ударном сжатии пористого графита давление перехода смещается [31, 32] за счет более высокого нагрева пористого материала и чувствительности фазового перехода к температуре.



Фиг. 5

Так, если при начальной плотности графита $\rho_0 = 0.55 \text{ г/см}^3$ точка излома (интерпретируемая как точка фазового перехода) имеет координату $\sim 25 \text{ кбар}$, то при $\rho_0 = 0.68 \text{ г/см}^3$ — координату $\sim 70 \text{ кбар}$; выше этой точки адиабата хорошо описывается уравнением состояния алмаза [32]. Вместе с тем на эффект фазового перехода в пористых материалах накладывается явление закрытия пор, изученное пока недостаточно. Поэтому целесообразно экспериментально исследовать линии фазового перехода какого-либо материала на плоскости p, V путем ударного сжатия смеси этого материала с другим, резко отличающимся по своим физико-механическим свойствам. В работе [33] описан эксперимент по ударному сжатию композитного материала медь — полиэтилен, однако плавление последнего не повлекло за собой излома ударной адиабаты в плоскости скорости удара — скорость свободной поверхности. Фазовый переход в кварце при ударном нагружении смеси кварц — парафин был отмечен еще в работе [9], однако его зависимость от начального состава смеси не была исследована.

Альтернативное объяснение опытов по ударному сжатию смесей должно исходить из предположения о неравенстве фазовых скоростей в сечении замера. В этой связи укажем, что в работе [33] с помощью рентгеновской диагностики было выявлено различие скоростей фаз выше точки плавления в ходе разгрузки.

Поступила 3 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Размагулин Х. А.* Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. *Truesdell C.* Sulle basi della termomeccanica. Nota 1. Atti della Accad. Naz. dei Lincei. Ser. 8. Rend., 1957, vol. 22, No. 1.
3. *Truesdell C.* Sulle basi della termomeccanica. Nota 2. Atti della Accad. Naz. dei Lincei. Ser. 8. Rend., 1957, vol. 22, No. 2.
4. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
5. *Николаевский В. Н.* Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей вещества. ПМТФ, 1969, № 3.
6. *Tsou F. K., Chou P. C.* The control-volume approach to Hugoniot of macroscopically homogeneous composites. J. Compos. Mater., 1970, vol. 4, pp. 526–537.
7. *Holmes B. S., Tsou F. K.* Steady shock waves in composite materials. J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, No. 3, pt 1.
8. *Богачев Г. А.* Расчет ударных адиабат некоторых гетерогенных смесей. ПМТФ, 1973, № 4.
9. *Дремин А. Н., Карпухин И. А.* Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ. ПМТФ, 1960, № 3.
10. *Алексеев Ю. Ф., Альтшулер Л. В., Крупникова В. П.* Ударное сжатие двухкомпонентных парафино-вольфрамовых смесей. ПМТФ, 1971, № 4.
11. *Баканова А. А., Дудолодов И. П., Сугулов Ю. Н.* Выполнение правила аддитивности для ряда сплавов при ударном сжатии. ПМТФ, 1972, № 6.
12. *Гогосов В. В., Фарбер П. Л.* Уравнения электрогидродинамики многофазных сред. Об одномерных течениях, разрывных решениях и затухании слабых волн. Изв. АН СССР, МЖТ, 1972, № 5.
13. *Garg S. K., Brownell D. H. Jr., Pritchett J. W., Herrmann R. G.* Shock-wave propagation in fluid — saturated porous media. J. Appl. Phys., 1975, vol. 46, No. 2.
14. *Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А., Трунин Р. Ф.* Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 3.
15. *Жарков В. Н., Калинин В. А.* Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М., «Наука», 1968.
16. *Лялов Г. М.* Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
17. *Nikolaevskii V. N.* On some relaxation processes connected with heterogeneity of continuous media. Proc. 11-th Internat. Congress Appl. Mech. (Munich. 1964). Berlin — Heidelberg — New York, Springer — Verlag, 1966.
18. *Нигмагулин Р. И.* К вопросу о волнах уплотнения в двухфазных средах. Вест. МГУ, Сер. матем. и механ., 1969, № 4.
19. *Херман В.* Определяющее уравнение для динамического сжатия пластических пористых материалов. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1970, № 5. (См. также *Herrmann W.* Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 6.)
20. *Carroll M. M., Holt A. C.* Static and dynamic pore — collapse relations for ductile porous materials. J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, No. 4.
21. *Carroll M. M., Holt A. C.* Steady waves in ductile porous solids. J. Appl. Phys., 1973, vol. 44, No. 10.
22. *Козарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
23. *Wijngaarden L. van.* On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 3.
24. *Parkin B. R., Gilmore F. R., Brode H. L.* Shock waves in bubbly water. Memorandum RM-2795-PR (abridged), 1961. (Рус. перев.: Ударные волны в воде с пузырьками воздуха. В сб. «Подводные и подземные взрывы». М., «Мир», 1974.)
25. *Mader Ch. L.* The two-dimensional hydrodynamic hot spot, vol. 2. Los Alamos Sci. Lab., La-3235, TID-4500, 1965.
26. *Баканова А. А., Дудолодов И. П., Сугулов Ю. Н.* Ударная сжимаемость пористых вольфрама, молибдена, меди и алюминия в области низких давлений. ПМТФ, 1974, № 2.

27. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
 28. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений. Успехи физ. н., 1965, т. 85, вып. 2.
 29. Carroll M. M., Holt A. C. Suggested modification of the P - α model for porous materials. J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, No. 2.
 30. High-velocity impact phenomena. Ed: R. Kirslow. New York — London, Acad. Press., 1970). (Рус. перев.: Высокоскоростные ударные явления. М., «Мир», 1973.)
 31. McQueen R. G., Marsh S. P. Hugoniot of graphites of various initial densities and the equation of state of carbon. In: Behaviour of dense media under high dynamic pressures. (Symposium H. D. P. IUTAM. Paris, 1967). Paris, Dunod, 1968.
 32. Boade R. R. Shock compression of foamed graphite. J. Appl. Phys., 1968, vol. 39, No. 3.
 33. Hopkins A. K. Shock unloading phenomena in fiber — reinforced composites. J. Appl. Phys., 1973, vol. 44, p. 2922.
-