

СТРУКТУРА ВОЛН ДЕТОНАЦИИ, ИОНИЗУЮЩИХ ГАЗ,
ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.
СЛУЧАЙ МАЛОЙ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ

А. А. БАРМИН, Л. Н. ЛЕБЕДЕВА

(Москва)

Если за волной детонации, ионизирующей газ, магнитное число Рейнольдса много больше единицы, то для описания таких волн так же, как и для ионизирующих ударных волн, необходимы дополнительные соотношения [1, 2]. Эти дополнительные соотношения не являются следствием основных интегральных законов и могут быть найдены из рассмотрения структуры волны.

В работе [2] исследовалась структура волн детонации, ионизирующих газ в наклонном магнитном поле. Предполагалось, что течение в слое, представляющем структуру, определяется конечной скоростью химической реакции и конечной электропроводностью. В случае когда характерная длина химической реакции много меньше характерной длины диссипации магнитного поля, в явном виде получены дополнительные соотношения, обеспечивающие существование структуры. Ниже рассматривается случай, когда характерная длина химической реакции много больше длины диссипации магнитного поля. При этом дополнительные соотношения получены в явном виде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим структуру волн детонации, ионизирующих газ в наклонном магнитном поле [2]. Будем пренебрегать диссипативными процессами, связанными с вязкостью и теплопроводностью, считая их несущественными по сравнению с джоулевой диссипацией и процессами, обусловленными конечной скоростью химической реакции. Ограничимся для простоты случаем плоской структуры. Тогда система уравнений, описывающая течение и магнитное поле внутри структуры, будет иметь вид (газ считаем совершенным)

$$(1.1) \quad \frac{dh}{dx} = \frac{mV_0}{v_m} [h(u-1) + E], \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{(1-\varepsilon)}{mV_0 u} S(t)$$

$$(1.2) \quad 0 = \varepsilon - \frac{1}{2q(\gamma-1)} [-(\gamma+1)u^2 - \gamma u(h^2 - 2I) + (\gamma-1)h^2 - 2E(\gamma-1)h - 2(\gamma-1)(e-q)] = \varepsilon - F(u, h)$$

$$(1.3) \quad t(\gamma-1) = u \left(I - u - \frac{1}{2} h^2 \right)$$

$$(1.4) \quad v_m^{-1}(t) = 0 \quad (t < t_*), \quad v_m^{-1}(t) > 0 \quad (t \geq t_*)$$

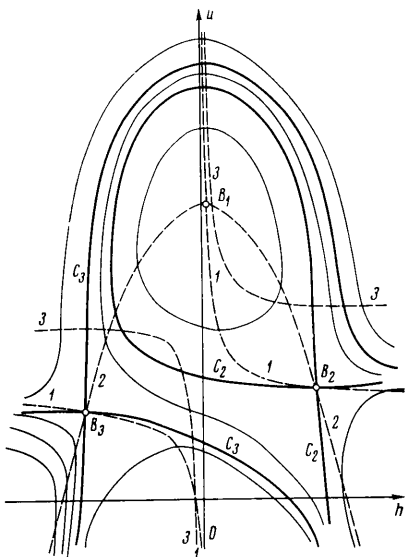
$$S(t) = 0 \quad (t < t_g), \quad S(t) > 0 \quad (t \geq t_g)$$

$$(1.5) \quad u = \frac{V}{V_0} = \frac{u_x}{u_{x_0}}, \quad V_0 = \frac{H_x^2}{4\pi m^2}, \quad h = \frac{H_y}{H_x}, \quad t = \frac{T}{m^2 V_0^2 / c_V}$$

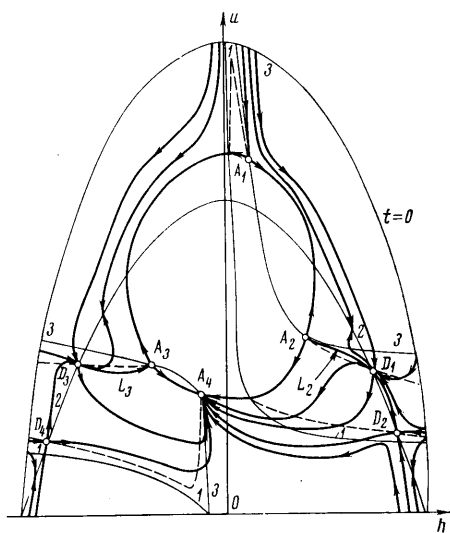
$$I = \frac{F_x}{m^2 V_0}, \quad e = \frac{e'}{m^2 V_0^2}, \quad E = \frac{E_0}{H_x V_0 / 4\pi}, \quad q = \frac{Q}{m^2 V_0^2}.$$

Здесь $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$ — магнитная вязкость, m , F_x , e' — потоки массы, x -й составляющей импульса и энергии, $V=1/\rho=u_x/m$, u_x — x -я составляющая вектора скорости, $E_0=cE_z/(4\pi m)$, H_x , H_y , E_z — компоненты вектора напряженности магнитного и электрического поля, Q — химическая энергия непрореагировавшего газа на единицу массы, ϵ — доля сгоревшего газа, меняющаяся от нуля до единицы. Система координат выбрана так, что E_y и потоки y -й и z -й составляющих импульса равны нулю.

2. Свойства интегральных кривых системы (1.1), (1.2). Интегральные кривые системы (1.1) лежат на поверхности Σ , задаваемой уравнением (1.2). Эта поверхность двузначна по u , причем значения u , соответствующие одним и тем же значениям h и ϵ , представляют состояния перед и за газодинамической ударной волной. На звуковой линии, задаваемой на поверхности Σ уравнением $u=a_0$ (a_0 — безразмерная газодинамическая скорость звука) эти значения совпадают. При этом на ней меняет-



Фиг. 1



Фиг. 2

ся направление движения вдоль интегральных кривых. Решение задачи может также содержать скачок со сверхзвукового на дозвуковой лист поверхности Σ , т. е. газодинамическую ударную волну.

Спроектируем поверхность Σ на плоскость $\epsilon=1$. Линии уровня $\epsilon=\text{const}$ на этой плоскости совпадают с семейством кривых, рассмотренным в [3], и изображены на фиг. 1. Это семейство обладает не более чем тремя особыми точками: B_2 , B_3 — седла, B_1 — изолированная особая точка. На фиг. 1–5 равенствам $F_h'=0$, $F_u'=0$ (проекция звуковой линии на плоскость $\epsilon=1$) соответствуют гипербола 1 и парабола 2. На фиг. 1 кривые, обозначенные c_2 , c_3 , являются сепаратрисами. В силу однозначной зависимости $\epsilon=F(u, h)$ от u , h качественный характер поведения интегральных кривых не изменится и проекции интегральных кривых будут описываться уравнением:

$$(2.1) \quad \frac{du}{dh} = \frac{\delta s(t)(1-F) - uF_h'[h(u-1) + E]}{uF_u'[h(u-1) + E]} = \frac{\Phi(u, h)}{uF_u'[h(u-1) + E]}$$

$$(2.2) \quad \delta = \frac{\nu_{m0} S_0 (4\pi m)^2}{H_x^4}, \quad \nu_m(t) = \nu_{m0} f(t), \quad S(t) = S_0 g(t), \quad s(t) = f(t) g(t)$$

Из (1.4) следует, что при $t_* < t < t_g$ интегральные кривые (2.1) совпадают с линиями $F=\text{const}$, а при $t_g < t < t_*$ — с прямыми $h=\text{const}$.

Обозначим через A_i особые точки уравнения (2.1), определяемые пересечением кривой $F=1$ с гиперболой (МГД-гипербола):

$$(2.3) \quad h(u-1) + E = 0$$

Структура детонационной волны состоит из газодинамического скачка со сверхзвуковой на дозвуковую часть кривой $F(u, h) = 0$ и интегральной кривой уравнения (2.1), идущей в одну из точек A_i [2].

Как известно из магнитной гидродинамики [4], существует не более четырех особых точек A_i . Можно показать [2], что точка A_1 всегда и точки A_2 и A_3 в случае, когда они лежат в дозвуковой области, являются седлами. Точка A_4 всегда и точки A_2, A_3 , когда они лежат в сверхзвуке, являются устойчивыми узлами. При этом одно собственное направление в этих точках совпадает с касательной к кривой $F(u, h) = 1$, а второе определяется формулой

$$(2.4) \quad u - u_i = \left[1 - u_i - \frac{\delta s(t_i)}{u_i} \right] \frac{h - h_i}{h_i}$$

Здесь индекс i показывает, что значение соответствующей переменной взято в точке A_i .

Будем рассматривать случай $\delta \ll 1$. Это имеет место, когда характерная длина химической реакции много больше характерной длины диссипации магнитного поля. Тогда собственное направление в точках A_i , определяемое (2.4), близко к касательной к МГД-гиперболе и в узловых точках вдоль него входит пучок интегральных кривых.

Кроме A_i особыми точками (2.1) являются точки пересечения проекции звуковой линии на плоскость (u, h) с нулевой изоклиной $\Phi(u, h) = 0$. Через эти особые точки возможен непрерывный переход через звуковую линию. Нулевая изоклина лежит в области, где $uF_h'[h(u-1)+E] \sim \delta$. Если $u(A_2) < a_0$ (или $u(A_3) < a_0$), она пересекает звуковую линию и существует особая точка $D_1(D_3)$. Если имеет место неравенство

$$(2.5) \quad (k^2 I - 1)h^2 + 3Eh + 2[2(e - q) - k^2 I^2] > 0, \quad k^2 = \gamma^2(\gamma^2 - 1)$$

где h — больший или меньший корень уравнения

$$k^2 h^3 - 2h(k^2 I - 1) - 2E = 0$$

то существуют еще две особые точки: D_2, D_4 соответственно (фиг. 2). Легко показать, что точки D_1, D_3 являются узлами с собственными направлениями, близкими к вертикальной прямой и касательной к МГД-гиперболе в точке ее пересечения со звуковой линией. Точка $D_2(D_4)$ является седлом с собственными направлениями с точностью до членов $\sim \delta$, совпадающими с касательными к сепаратрисе $c_2(c_3)$ семейства $F = \text{const}$, проведенными в точке $B_2(B_3)$.

В области, где $uF_h'[h(u-1)+E] \sim 1$, интегральные кривые с точностью до членов порядка δ совпадают с линиями $F = \text{const}$. Картина интегральных кривых для случая, когда точки A_2, A_3 лежат в дозвуковой области, представлена на фиг. 2. На фиг. 1–5 МГД-гиперболе соответствует кривая 3, нулевая изоклина $\Phi(u, h) = 0$ нанесена пунктиром.

Чтобы построить структуру волны, нужно знать, как меняется температура вдоль интегральных кривых уравнения (2.1). На прямой $h = \text{const}$ температура имеет один максимум в точке, лежащей на параболе

$$I - 2u - \frac{1}{2}h^2 = 0$$

На дозвуковой части кривой $F = \text{const}$ температура всегда имеет максимум при $h < 0$. Возможно также появление еще двух экстремальных точек, когда $F = 1$ разомкнута. На МГД-гиперболе, которая, как будет показано ниже, с точностью до членов $\sim \delta$ является интегральной кривой (2.1), температура имеет максимум на каждой из ветвей в одной точке.

3. Структура волн детонации, ионизирующих газ. Рассмотрим структуру различных типов волн при разных соотношениях между t_g, t_* и температурой t_s за газодинамическим скачком, с которого начинается структура. Название волны, как и для ионизирующих ударных волн, будет состоять из двух частей, связанных с соотношениями между скоростью газа и скоростями малых возмущений до и после волны [1].

I. Быстрая сверхзвуковая волна. Структура такой волны должна заканчиваться в точке A_2 [2]. Пусть вначале эта точка является дозвуковой. Тогда в нее входит единственная интегральная кривая L_2 , выходящая из

точки D_2 (фиг. 2). Представим уравнение L_2 в виде

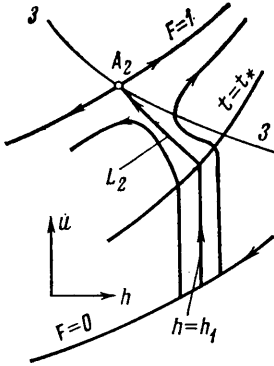
$$(3.1) \quad u = 1 - \frac{E}{h} + \delta y(h)$$

Подставляя (3.1) в (2.4), получим уравнение L_2 с точностью до членов порядка δ^2

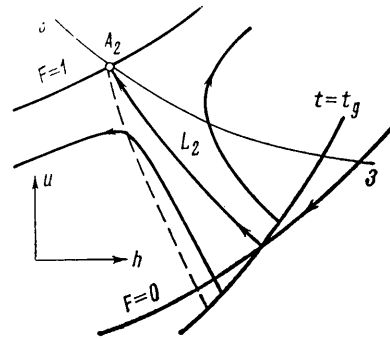
$$(3.2) \quad u = 1 - \frac{E}{h} + \delta \frac{s(1-F)h}{u(F_h' h^2 + F_u' E)}$$

Здесь значения всех величин взяты вдоль МГД-гиперболы.

1) Если $t_s > \max(t_g, t_*)$, то решение задачи о структуре состоит из газодинамического скачка со сверхзвуковой на дозвуковую часть кривой $F=$



Фиг. 3



Фиг. 4

$=0$ и отрезка интегральной кривой L_2 , которая соответствует течению проводящей жидкости с химическими реакциями. Для существования структуры необходимо, чтобы газодинамический скачок оканчивался в точке пересечения $F=0$ с L_2 . С учетом (3.2) это дает дополнительное соотношение в виде

$$(3.3) \quad E = A - \frac{q(\gamma-1)h_1^4 s(u_1, h_1) \delta}{(h_1 - A) \{ (h_1 - A) [h_1^3 + A(\gamma+1)] + Ah_1(h_1^2 - 2I) (\gamma/2) \}}$$

$$A = h_1 \left[u_1 + 1 + \frac{\gamma}{\gamma+1} (h_1^2 - 2I) \right]$$

Здесь индекс 1 и далее индекс 2 относятся к величинам перед и за волной, соответственно. Очевидно, что в этом случае с точностью до членов порядка δ структура состоит из ионизирующей ударной волны и следующей за ней зоной магнитогидродинамического течения ($v_m=0$) с химической реакцией.

2) Если $t_g < t_s < t_*$, то решение состоит из газодинамического скачка, отрезка прямой $h=\text{const}$, соответствующего течению непроводящего газа с химическими реакциями, в котором температура достигает значения t_* , и участка интегральной кривой L_2 (фиг. 3). Для существования структуры необходимо, чтобы $t=t_*$ в точке пересечения прямой $h=h_1$ с L_2 , что дает дополнительное соотношение

$$(3.4) \quad E^2 + Ah_1 E - h_1^2 [t_*(\gamma-1) + 1 + A] + \delta y(h_1) h_1 (Ah_1 + 2E) = 0$$

$$A = -\frac{1}{2} h_1^2 + I - 2$$

где $y(h_1)$ определяется (3.2). Заметим, что если в (3.3), (3.4) пренебречь членами порядка δ , то получим дополнительные соотношения, соответствующие замене L_2 МГД-гиперболой.

3) Если $t_* < t_s < t_g$, то газ за газодинамическим скачком ионизован и решение задачи строится из скачка, отрезка кривой $F=0$, отвечающего течению проводящей жидкости без химических реакций, в котором температура растет до $t=t_g$, и участка кривой L_2 (фиг. 4). Для существования структуры температура должна равняться t_g в точке пересечения L_2 с $F=0$ и дополнительное соотношение находим из условий

$$(3.5) \quad u=1-\frac{E}{h}+\delta y(h), \quad F(u, h)=0, \quad t_g(\gamma-1)=u\left(I-u-\frac{1}{2}h^2\right)$$

Из близости L_2 к МГД-гиперболе и направления движения вдоль кривой $F=0$ следует, что $(h-h_1) \sim \delta$. Тогда из (3.5) получаем дополнительное соотношение с точностью до членов $\sim \delta$ включительно

$$(3.6) \quad (t_g-t_s)(\gamma-1)(Ah_1^2-E) = \left[\left(I - \frac{1}{2}h_1^2 - 2u_s \right) A + u_s h_1 \right] \times \\ \times [(u_s-1)h_1 + E - \delta h_1 y(h_1)] \\ u_s = \frac{\gamma}{\gamma+1}(2I-h_1^2) - u_1, \quad t_s = u_s \left(I - u_s - \frac{1}{2}h_1^2 \right) \\ A = \frac{\gamma^2/(\gamma+1)(h_1^2-2I)h_1 + \gamma u_1 h_1 + (\gamma-1)(h_1-E)}{(\gamma+1)u_1 - \gamma(I - \frac{1}{2}h_1^2)}$$

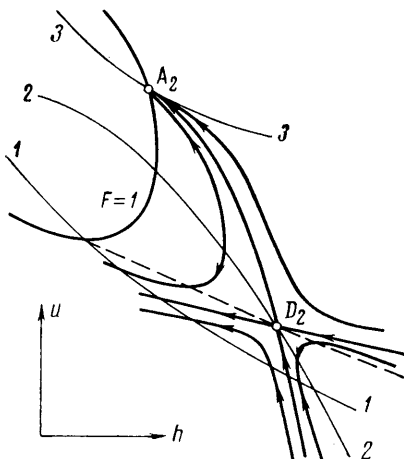
При этом начальные параметры должны удовлетворять условию

$$(3.7) \quad \delta y(h_1) < u_s - \left(1 - \frac{E}{h_1} \right) < 0$$

где E определяется из (3.6).

При $\delta=0$ из (3.6), (3.7) следует $t_g=t_s$, $E=h_1(1-u_s)$, т. е. начальное состояние не является произвольным. Так как рассматриваемая волна сверхзвуковая и никакие возмущения газодинамических величин не могут распространяться по состоянию перед ней, то такая детонационная волна в общем случае при течении газа не образуется. Наличие двух дополнительных соотношений делает, кроме того, такую волну неэволюционной. При учете малого δ возмущения начального состояния $\sim \delta$ могут изменить это состояние так, что рассматриваемая волна не будет иметь структуры и в силу этого распадется на другие волны конечной амплитуды.

Заметим, что магнитное поле в течении, представляющем структуру, убывает для всех типов структур. При этом если температура в течении $t > \max(t_*, t_g)$, то в нем изменение магнитного поля сопровождается горением в отличие от случая $\delta \gg 1$ [2].



Фиг. 5

Пусть теперь $u(A_2) > a_0$. Тогда если выполняется условие (2.5), то на звуковой линии при $h > 0$ существует единственная седловая особая точка D_2 . Через эту точку по интегральной кривой L возможен переход из дозвуковой области в сверхзвуковую. Обозначим часть кривой L , лежащую в дозвуковой области, через L_2' , а в сверхзвуковой — через L_2 (фиг. 5). Эти кривые с точностью до членов $\sim \delta$ совпадают с сепаратрисой c_2 семейства $F = \text{const}$ (фиг. 1) и отрезка МГД-гиперболы. Так как в этом случае точка A_2 является устойчивым узлом, то кривая L_2 входит в A_2 . Отсюда следует, что интегральная кривая, входящая в седловую особую точку A_1 , целиком лежит в сверхзвуковой области. Таким образом, не существует волн детонации, состояние за которыми соответствует точке A_1 .

Для существования структуры первого типа ($t_s > \max(t_*, t_g)$) необходимо, чтобы кривая $F(u, h) = 0$ являлась сепаратрисой c_2 . Это дает дополнительное соотношение в виде

$$(3.8) \quad \begin{aligned} 27E^4 - 4E^2(kI-1) [(kI-1)^2 + 9kc] + 4c[kc + (kI-1)^2]^2 &= 0 \\ c &= 2(e-q) - kI^2, \quad k = \gamma^2 / (\gamma^2 - 1) \end{aligned}$$

Структура второго типа ($t_g < t_s < t_*$) существует, если точка пересечения прямой $h = h_1$ с изотермой $t = t_*$ лежит на сепаратрисе c_2 . Из этого условия получаем дополнительное соотношение:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} (h_1^2 - 2Eh_1 - A)^2 + 2 \left(I - \frac{1}{2} h_1^2 \right)^2 (h_1^2 - 2Eh_1 - A) + \\ + t_g(\gamma - 1) \left(I - \frac{1}{2} h_1^2 \right) &= 0 \\ A &= 2(e-q) - (\gamma + 1)t_g \end{aligned}$$

где $(e-q)$ определяется из уравнения (3.8). К соотношению (3.9) надо добавить неравенство (2.5), где $q=0$, а E определяется из (3.9). В силу него кривая $F=1$ пересекает звуковую линию при $h > 0$.

В случае $t_* < t_s < t_g$ задача о структуре имеет решение, если в точке пересечения L_2' с $F=0$ температура равняется t_g . Так как L_2' располагается в δ -окрестности сепаратрисы c_2 , то для существования точки пересечения необходимо, чтобы $F=0$ также лежала в этой окрестности. Отсюда при $\delta=0$ получаем дополнительное соотношение (3.8).

Из направления движения вдоль интегральных кривых следует, что структуры всех типов возможны, если $h_1 > h(D_2)$. Здесь $h(D_2)$ — значение h в точке D_2 , которая с точностью до δ совпадает с точкой B_2 . Отсюда получаем ограничение типа неравенства

$$kh_1^3 + 2h_1(1 - kI) - 2E < 0, \quad k = \gamma^2 / (\gamma^2 - 1)$$

Заметим, что в случае $u(A_2) > a_0$ возможна быстрая детонация, ионизирующая газ, типа Жуге, когда $u(A_2) = a_+$ (a_+ — скорость распространения быстрых магнетогидродинамических возмущений).

При $u(A_2) < a_0$ в A_2 можно попасть так же по интегральной кривой, проходящей через особые точки D_1 и D_2 . Легко видеть, что в этом случае дополнительные соотношения будут теми же, что и в случае $u(A_2) > a_0$. При этом в течении, представляющем структуру, за скачком существует сверхзвуковая область.

Выше при исследовании структуры считалось, что температура, достигнув критической, в дальнейшем остается больше нее. Однако изменение температуры, вообще говоря, не является монотонным, и возможны случаи, когда реакция, начавшись, может затухнуть и т. д. Из характера измене-

ния температуры вдоль интегральных кривых следует, что при $u(A_2) < a_0$ условия, обеспечивающие необращение в нуль скорости реакции и проводимости, будут: $t_2 > \max(t_*, t_g)$. В остальных случаях температура внутри структуры может иметь минимум t_m , поэтому требования на температуру имеют вид $\min(t_2, t_m) > \max(t_*, t_g)$.

II. Промежуточная сверхзвуковая волна. Структура такой волны заканчивается в точке A_3 . В рассматриваемом случае плоской структуры ($H_2=0$), как и в [2] характер особой точки A_3 и картина интегральных кривых в ее окрестности совпадают со случаем точки A_2 (фиг. 2). Поэтому дополнительные соотношения и ограничения в виде неравенств для промежуточной волны будут теми же, что и для быстрой волны. При этом всюду вместо интегральной кривой L_2 , точек B_2, D_1, D_2 надо рассматривать кривую L_3 , точки B_3, D_3, D_4 (фиг. 2). Заметим, что как в случае быстрых, так и в случае промежуточных волн $|h|$ в волне убывает.

III. Медленная сверхзвуковая волна. Структура этой волны оканчивается в точке A_4 , которая является устойчивым узлом, и на плоскости (u, h) есть целая область, заполненная интегральными кривыми, входящими в A_4 (фиг. 2). Поэтому аналогично [2] дополнительные соотношения типа равенства отсутствуют и решение задачи существует в некоторой области значений параметров.

В структуре медленных волн, в отличие от быстрых и промежуточных, магнитное поле (по модулю) может как убывать, так и возрастать. Температура в структуре может меняться не монотонно, причем возможно существование до пяти экстремальных точек. Поэтому ограничения на температуру для того, чтобы не обратились в нуль скорость реакции и проводимость, будут аналогичны ограничениям в случае быстрых волн, когда $u(A_2) > a_0$.

Отметим, что в структуре медленных и быстрых волн, когда за скачком есть сверхзвуковая область, при $t > \max(t_*, t_g)$ течение разбивается на зоны. В первой из них течение магнитогидродинамическое при незначительном тепловыделении. За ней следует область МГД-течения с химическими реакциями.

Таким образом, в рассматриваемом случае в зависимости от начальных параметров и величин, характеризующих физико-химический процесс (t_*, t_g, q), возможны различные дополнительные соотношения, которые необходимо добавить к основной системе граничных условий на разрыве. В зависимости от выбранного дополнительного соотношения будут различными и свойства детонационных волн, ионизирующих газ.

Поступила 25 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле. Гидромеханика, т. 5, 1970. М., ВИНТИ, 1971.
2. Бармин А. А., Лебедева Л. Н. Структура волн детонации, ионизирующих газ при наличии электромагнитного поля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.
3. Бармин А. А., Пушкарь Е. А., Щелкачев М. В. Некоторые свойства ионизирующих ударных волн в магнитном поле. М., 1971. (МГУ, НИИ механики. Отчет № 1273.)
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962, стр. 199–227.