

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАХОВСКОГО
ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ
С РАЗЛИЧНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ АДИАБАТЫ

В. Н. ЛЯХОВ

(Москва)

Некоторые особенности процессов регулярного и маховского отражений при постоянном значении показателя адиабаты $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ теоретически исследованы в [1]. Было показано, что увеличение интенсивности падающей волны больше некоторой величины приводит к возникновению внутреннего скачка уплотнения hi (фиг. 1) и излому отраженной волны (в точке h), которые ранее наблюдались только экспериментально [2-4]. В настоящей работе методом, изложенным в [1], изучается влияние показателя адиабаты на указанные особенности процесса маховского отражения, которые приводят к значительному повышению давления (до максимальной величины P_m) на поверхности клина в окрестности точки i . Представлены кривые изменений давления и плотности вдоль поверхности клина. Получено, что увеличение γ приводит к таким же качественным изменениям эиур давления и плотности на поверхности, какие наблюдаются при увеличении угла полураствора клина β или уменьшении числа Маха M_∞ фронта набегающей на клин ударной волны ab . Отмеченное подобие процесса отражения впервые было получено в работе [3] для слабых ударных волн, когда внутренний скачок уплотнения не появляется.

1. В рассматриваемых ударно-волновых явлениях действие вязкости сосредоточено в узких зонах около контактных разрывов или фронтов ударных волн, а также в пограничном слое, формирующемся на поверхности клина. По истечении некоторого времени от начала взаимодействия, когда ударная волна удалится достаточно далеко от вершины клина O , размеры возмущенной области станут намного больше упомянутых зон. В этом случае при анализе общей волновой структуры течения можно пренебречь влиянием вязкости и для математического эксперимента использовать в качестве рабочей среды модель идеального газа, описываемую нелинейной системой уравнений газовой динамики с частными производными [1].

Интегрирование уравнений проводится методом сквозного счета без выделения разрывов в области течения. В этом случае второй порядок аппроксимации используемой разностной схемы [6, 7] предпочтительнее первого, так как улучшается разрешающая способность конечно-разностного метода при определении местоположений скачков уплотнений, и особенно контактных разрывов. Последние проявляются в виде узких переходных зон с сильными градиентами газодинамических параметров. Если ширина ударных волн (3-4 интервала разностной сетки) соизмерима с размером рассматриваемой возмущенной области течения, то погрешность счета может оказаться очень большой. Такая ситуация реализуется при решении нестационарной задачи дифракции в переменных x, y, t для моментов времени, когда ударная волна близка к острию клина.

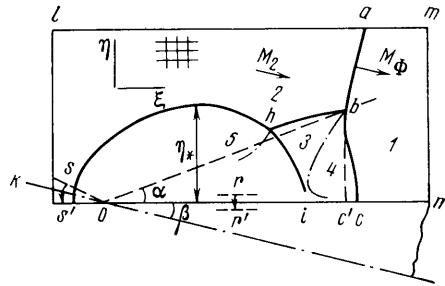
Для увеличения точности необходимо рассматривать такое поле течения, когда ударная волна удалена от вершины клина. Это достигается введением автомодельных переменных $\xi = x/u_\Phi t$, $\eta = y/u_\Phi t$ (u_Φ — скорость ударной волны ab относительно клина) и получением решения методом установления вдоль гиперболической переменной $\tau = \ln t$ [1]. В этом случае волна ab все время расположена на расстоянии $\xi = 1$ от вершины клина O . Для уменьшения осцилляций решения вблизи сильных разрывов применяется оператор сглаживания [8], который не ухудшает второго порядка аппроксимации в гладких областях. В работах [1, 9] сравнением с аналитическими решениями показана достаточно высокая точность результатов, полученных с помощью используемого разностного метода.

2. Изучению влияния показателя адиабаты γ на некоторые характеристики процесса отражения ударной волны от клина посвящено ограниченное число работ. Например, зависимость критических углов β_* (при $\beta < \beta_*$ не существует решения в рамках локального рассмотрения регулярного отражения [10]) от γ исследовалась в работе [11]. Аномальные свойства решения локальной теории регулярного отражения при $\beta \geq \beta_*$ для различных значений γ рассмотрены в [12]. В экспериментах [4] изучались геометрические характеристики волновых конфигураций маховского отражения в средах с различными γ .

Практический интерес представляет рассмотрение полной краевой задачи о маховском отражении ударной волны и изучение свойств потока для газов с различными показателями адиабаты $\gamma = \text{const}$. Основным достоинством математического эксперимента является возможность получения в рамках принятой модели среды значений газодинамических параметров в любой точке потока без априорного задания какой-либо схемы взаимодействия.

Общепринятой трактовкой различных значений γ является предположение о том, что $f = 2/(\gamma - 1)$ — число степеней свободы молекулы среды. В [11] приведены примеры состояний газа, в которых $\gamma \sim 1 \div 3$. Для одно- и двухатомных газов $f = 3$ и 5, следовательно, $\gamma = 1.67$ и 1.4. При повышении температуры и уменьшении плотности газа значения показателя адиабаты уменьшаются ($\gamma \rightarrow 1$) из-за того, что возбуждаются колебательные степени свободы. В двумерном течении значение $\gamma = 2$ можно интерпретировать как движение идеально проводящей жидкости в поперечном направлении к замороженному магнитному полю \mathbf{B} , которое параллельно кромке клина [13]. Физически это эквивалентно подавлению одной степени свободы теплового движения заряженной частицы ($f = 2$), которая может лишь вращаться вокруг силовой линии и двигаться вдоль нее, но не может изменить радиус вращения. Кроме того, результаты, полученные с $\gamma = 2$, важны для интерпретации данных гидрогазодинамической аналогии [14]. Значение $\gamma \sim 3$ используется для описания уравнений состояния газообразных продуктов детонации конденсированных взрывчатых веществ [15].

3. Результаты математического эксперимента, выполненного при $M_\Phi = 3$, $\beta = 40^\circ$ и различных значениях γ , представлены на фиг. 2–4. Кривые, характеризующие изменения вдоль поверхности клина давления и плотности, отнесенные к P_0 и ρ_0 , представлены на фиг. 2, 3. Вершине клина соответствует $\xi = 0$, величины P_0 и ρ_0 — параметры газа при отражении удар-



Фиг. 1

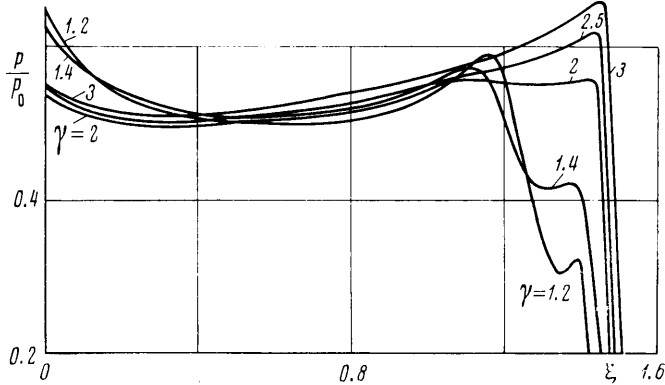
ной волны от параллельной ей стенки ($\beta=90^\circ$) [10]

$$P_0 = P_2 \frac{(2\nu+1)P_{21}-\nu}{1+\nu P_{21}}, \quad \rho_0 = \rho_2 \frac{\nu+P_{02}}{1+\nu P_{02}}$$

$$P_{21} = \frac{P_2}{P_1} = \mu M_\Phi^2 - \nu, \quad P_{02} = \frac{P_0}{P_2}, \quad \mu = \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

индексы 1 и 2 относятся к параметрам потока до и за ударной волной ab .

По характеру кривых видно, что при $\gamma=1.2$ и 1.4 давление сначала повышается во фронте маховской волны bc (первый подъем при $\xi \sim 1.4-1.5$) и далее, в окрестности точки i (фиг. 1), увеличивается до $p=P_m$ ($\xi \sim 1.1$).



Фиг. 2

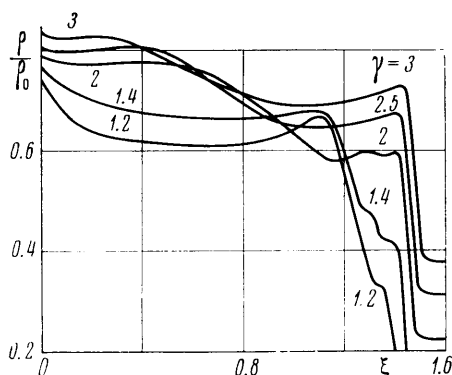
При $\xi \leq 1.0$ устанавливается уровень давления, определяемый обтеканием клина через нестационарную отраженную волну потоком газа с числом Маха $M_2 = (P_{21}-1)/(\gamma M_\Phi \sqrt{P_{21}/\rho_{21}})$. Для больших значений γ максимальное давление отражения P_m , как видно из фиг. 2, достигается сразу за фронтом маховской волны bc . Значения P_{01} , $\rho_{01} = \rho_0/\rho_1$ и M_2 для $M_\Phi = 3$ и различных γ приведены ниже

γ	P_{01}	ρ_{01}	M_2
1.2	58.9	20.6	1.77
1.4	51.7	10.9	1.36
2.0	45.6	4.5	0.82
2.5	44.5	3.2	0.62
3.0	44.2	2.6	0.50

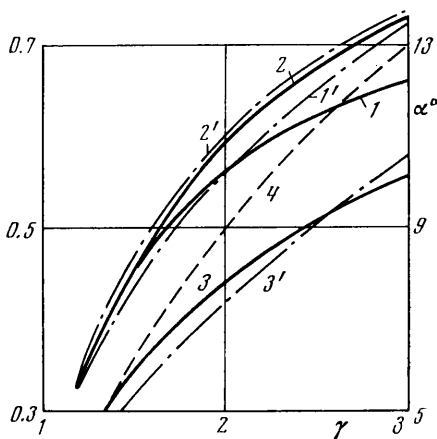
При дифракции ударной волны около какого-либо тела условно в поле течения можно выделить область с доминирующим влиянием процесса отражения ($\xi \geq 1.0$) и течение около передней части тела ($\xi \leq 1.0$), в которой определяющую роль играют параметры слутного потока z (фиг. 1), обтекающего тела [16]. Максимальное давление P_m реализуется на стыке этих областей, где в достаточно «мягких» газах (с малым γ) возникает внутренняя волна сжатия или скачок уплотнения hi [1], вызывающие излом отраженной волны. Интересно то, что, как и в линейном случае (при малых β) [17], существуют режимы, когда давление за фронтом маховской волны выше давления в окрестности вершины клина ($\gamma=3$) и наоборот ($\gamma=1.2, 1.4$). Конечно, в линейном решении отсутствует область максимального давления ($p=P_m$ при $\xi \sim 1.1$) ибо это явление обусловлено нелинейным наложением процессов отражения волны и обтекания тела потоком z . Аналогичное превышение давления за фронтом маховской волны по

отношению к $p(\xi=0)$ наблюдается [1] при увеличении $\beta(M_\Phi = \text{const})$ или уменьшении $M_\Phi(\beta = \text{const})$ 1.

Кривыми 1 и 2 на фиг. 4 представлены зависимости $p(\gamma)/P_0$ и $\rho(\gamma)/\rho_0$ параметров за фронтом маховской волны, полученные в численном эксперименте. Кривыми 1' и 2' — те же величины, но рассчитанные по элементарной теории маховского отражения [10], в которой предполагается прямолинейность скачков ba , bc , bh в окрестности точки b и перпендикуляр-



Фиг. 3



Фиг. 4

ность маховской волны bc к поверхности клина (фиг. 1, пункт bc'). Видно, что зависимости $\rho(\gamma)$ близки друг к другу (кривые 2 и 2'), а для $p(\gamma)$ наблюдается расхождение. Значения максимального удаления η^* отраженной ударной волны от поверхности клина (фиг. 1) характеризует кривая 4. Аналогичное сравнение углов α , заключенных между траекторией тройной точки b и поверхностью клина, представлено кривыми 3 и 3' (в последнем случае шкала справа).

4. Рассмотрение в рамках теории идеального газа трехударной конфигурации в окрестности точки b предполагает наличие контактного разрыва между областями 3 и 4 (штрихпунктир на фиг. 1). Заметим, что другой контактный разрыв проходит в области 5, начинаясь в точке h , однако изменение плотности на нем слишком мало, поэтому при анализе ударно-волновой структуры течения его влиянием можно пренебречь. В проводимом математическом эксперименте газ не до конца идеален, так как в разностных уравнениях движения присутствует схемная вязкость, определяемая остаточным членом аппроксимации и оператором сглаживания. Несмотря на то что действие ее иное, чем действие естественной вязкости, качественно схемная вязкость играет ту же роль: происходит диссипация энергии при переходе через скачки уплотнений и вместо контактных разрывов формируются зоны смешения. В разностном решении соотношения Ренкина — Гюгонио выполняются довольно точно. Относительно формирующихся зон смешения здесь можно сказать лишь то, что качественные и количественные исследования их еще далеки от завершения.

В настоящей работе проведено качественное изучение некоторых особенностей формирующихся зон смешения. Установлено, что зона смешения, начинающаяся в точке b не размывается за время установления решения (600–800 итераций по τ). При больших значениях γ , а также при

1 Отмечено Г. М. Арутюняном.

малых M_Φ и фиксированных γ и β [1] контактный разрыв (условно определяемый серединой зоны смешения) отклоняется к вершине клина. В случаях малых γ и больших M_Φ контактный разрыв скручивается в сторону маховой волны (штрихпунктир на фиг. 1), в результате чего последняя выпучивается вперед (сравнить bc' и bc). В области 4 при этом образуется вихрь, вращающийся против часовой стрелки. Такое поведение контактного разрыва качественно согласуется с экспериментом [4].

Анализ систематических расчетов [1], изобар и экспериментальных результатов (например, [2-4]) позволяет сделать вывод о том, что различное поведение кривых $p(\xi)$ и $\rho(\xi)$ при $\gamma=1.4$ в окрестности $\xi \sim 1.30-1.35$ (фиг. 2 и 3) обусловлено наличием контактного разрыва, выходящего из точки b и разделяющего зоны 3 и 4 (фиг. 1). При $\gamma=1.2$ контактный разрыв сильно скручен и размыт и не проявляется так четко, как при $\gamma=1.4$, а при $\gamma \geq 2$ градиент плотности хорошо заметен при $\xi \sim 0.3-1.1$.

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод, что чисто гидродинамические процессы играют определенную роль в выпучивании маховой волны (наряду, например, с лучистым прогревом среды 1 при высоких температурах в области 4).

Автор благодарен О. С. Рыжову за ряд полезных замечаний, сделанных при обсуждении работы.

Поступила 15 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н. Численное решение задачи дифракции ударной волны на клине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
2. Gvozdeva L. G., Vazhenova T. V., Predvoditeleva O. A., Fokeev V. P. Pressure and temperature at the wedge surface for Mach reflection of strong shock waves. *Astronaut. Acta*, 1970, vol. 15, No. 5-6.
3. Мерритт Д. Л. Маховское отражение на конусе. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 6.
4. Семенов А. Н., Сыщикова М. П., Березкина М. К. Экспериментальное изучение особенностей маховского отражения в ударной трубе. *Ж. техн. физ.*, 1970, т. 40, вып. 5.
5. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
6. Каширский А. В., Коровин Ю. В., Чудов Л. А. Явный разностный метод для расчета двумерных нестационарных задач о движении продуктов детонации. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 19. М., Изд. МГУ, 1972.
7. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке. *Инж.-физ. ж.*, 1971, т. 21, № 6.
8. Ляхов В. Н. Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. В сб. «Численные методы механики сплошной среды». Новосибирск, Изд. ВЦ СО АН СССР, 1974, т. 5, № 3.
9. Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н. Взаимодействие ударной волны с клином в сверхзвуковом потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, № 4.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
11. Арутюнян Г. М., Белоконов В. А., Карчевский Л. В. О влиянии показателя адиабаты на отражение ударных волн. ПМТФ, 1970, № 1.
12. Арутюнян Г. М. Теория аномальных режимов регулярного отражения ударных волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
13. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.
14. Эммонс Г. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
15. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1971.
16. Ляхов В. Н. Нестационарные нагрузки при дифракции ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
17. Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.