МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1976

УДК 533.6.011.72

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТРУБАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОЗМУЩЕНИЯМ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

Л. В. ШИДЛОВСКАЯ

(Москва)

Для задачи о движении газа переменной плотности в ударных трубах переменного сечения проводится качественное исследование класса автомодельных течений с учетом возможного начального движения газа. Получены асимптотические формулы вблизи контактного разрыва, проведено численное решение задачи для случая конечной плотности на контактной поверхности. Даются приложения задачи к проблеме движения газа при солнечных вспышках, вычислены параметры возмущенного магнитного поля. Результаты расчета сопоставляются с данными по наблюдениям ударных волн в космическом пространстве.

1. Пусть в трубе переменного сечения находится движущийся или покоящийся газ. В начальный момент времени через входное отверстие в трубу начинается подвод газа, имеющего переменные давление и плотность, в результате чего в трубе возникает нестационарное движение обоих газов. Движение в трубе считается одномерным. Если имеется слабое магнитное поле, то при бесконечной проводимости газа оно будет деформироваться в соответствии с законом вмороженности. Решение задачи в такой постановке будет описывать движение газа на расстояниях от отверстия, значительных по сравнению с его диаметром.

Движение в трубе определяется начальными значениями давления и плотности газа внутри трубы p_1, $\rho_1=A_1r^{-\omega}$, показателем адиабаты γ_1, массовым расходом $Q=Q(t)$ и потоком энергии $N=N(t)$ через входное отверстие, показателем адиабаты вытекающего газа γ_2.

Аппроксимируем $Q(t)$ и $N(t)$ степенными функциями

$$Q(t)=cqt^{\alpha},\quad N(t)=cnt^{\beta},\quad c=\text{const}$$

Закон изменения площади поперечного сечения трубы на расстояниях r, значительных по сравнению с диаметром входного отверстия, принимается следующим:

$$F(r)=cr^{\nu-1}$$

Условие автомодельности задачи (при $p_1=0$) имеет вид

$$(1+\alpha)(2+\nu-\omega)-(\nu-\omega)(\beta+3)=0 \tag{1.1}$$

Если при $\omega\neq0$ начальное давление $p_1\neq0$, то задача неавтомодельна. Аналогичная задача была впервые рассмотрена в [1] для случая постоянной начальной плотности газа, без учета возможного начального движения газа в трубе и без исследований конфигурации магнитного поля.

Поставленная выше задача может рассматриваться как возможная гидродинамическая модель вызванного солнечной вспышкой движения межпланетного газа, если сделаны следующие предположения относительно моделируемых ударных волн в космическом пространстве [2]: имеет место сферическая симметрия и движение происходит в радиальном направлении от Солнца; ударная волна достаточно сильная, так что энергией солнечной гравитации и внутренней энергией окружающей среды можно пренебречь; существует контактная поверхность раздела двух газов при вытеснении одного газа другим; в рассматриваемой достаточно далекой от Солнца области межпланетного пространства выполняется условие $E_b > E_k$, где E_b — энергия вспышки, а E_k — полная кинетическая энергия солнечного ветра. Последнее ограничение справедливо при изменении r от $0.01r_a$ до $1.5r_a$, где $r_a=1$ а.е.— средний радиус земной орбиты.

Задача сводится к построению решения системы уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v)+(\nu-1)\frac{\rho v}{r}=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma_i}}\right)+v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma_i}}\right)=0 \qquad (i=1,2)$$

Здесь v, ρ, p — соответственно скорость, плотность и давление, а γ_i — показатели адиабаты для газа, находящегося в трубе (γ_1) и вытекающего из отверстия (γ_2).

2. Решение автомодельной задачи ищем в виде

$$v=\frac{r}{t}V(\lambda), \qquad \rho=A_1r^{-\omega}R(\lambda), \qquad p=A_1r^{2-\omega}t^{-2}P(\lambda)$$

$$\lambda=\lambda_0\sqrt{\frac{q}{n}}rt^{-\delta}, \qquad \lambda_0=\text{const}, \qquad \delta=\frac{\beta+3}{2+\nu-\omega}$$

Функции V, P, R являются решением системы уравнений [2]

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z}{(V-\delta)W(V,z)}\{[2(V-1)+\nu(\gamma_i-1)V](V-\delta)^2- \tag{2.1}$$
$$-(\gamma_i-1)V(V-1)(V-\delta)-[2(V-1)+\varkappa_i(\gamma_i-1)z]\}$$

$$\frac{d\ln z}{dV}=\frac{z-(V-\delta)^2}{W(V,z)}, \qquad (V-\delta)\frac{d\ln R}{d\ln\lambda}=(\omega-\nu)V-\frac{W(V,z)}{z-(V-\delta)^2}$$

$$W(V,z)=[V(V-1)(V-\delta)-(\varkappa_i-\nu V)z]$$

$$z=\frac{\gamma_iP}{R}, \qquad \varkappa_i=\frac{2+\delta(\omega-2)}{\gamma_i}$$

Из автомодельности следует, что контактный разрыв движется по закону $\lambda=\text{const}$, т. е. имеем поршень с законом движения $r_1=\text{const}\ t^\delta=\lambda_1t^\delta$. Из условия конечности энергии $\beta>-1$ вытекает, что решение задачи существует при

$$\frac{\beta+3}{2+\nu-\omega}\equiv\delta>\frac{2}{2+\nu-\omega} \tag{2.2}$$

Отсюда получаем, что $\alpha>(\nu-2-\omega)/(\nu+2-\omega)$.

Задача разделяется на две: газ вытекает из точечного отверстия в области $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$; задача о поршне ставится в области $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant1$. Интегральные кривые рассматриваются в плоскости V, $z=\gamma P/R$. В общем случае начальному состоянию газа в трубе соответствует точка в области между осью V и параболой слабых разрывов

$$z=(V-\delta)^2 \tag{2.3}$$

Из соотношений на скачке [3] следует, что преобразование, соответствующее переходу через поверхность сильного разрыва, отображает область между осью V и параболой (2.3) в область между параболой

$$z=2\gamma(V-\delta)^2/(\gamma-1) \tag{2.4}$$

и параболой (2.3).

Величины перед ударной волной V_1, z_1, R_1, P_1 считаются заданными; используя условия на поверхности сильного разрыва нетрудно найти величины за ударной волной V_2, z_2, R_2, P_2.

Изучим особые точки системы уравнений (2.1) в плоскости Vz: $H(V=\delta,\ z=0)$ при $\delta>2/(\omega\gamma-\omega+2)$, или $H'(V=\delta,\ z=\infty)$ при $\delta<2/(\omega\gamma-\omega+2)$ – узел; $O(V=0,\ z=0)$ – узел; $F(V=1,\ z=0)$ – узел; $D(V=[2+\delta(\omega-2)]/\nu\gamma,\ z=\infty)$ — седло; $K(V=2/[2+\nu(\gamma-1)],\ z=\gamma V(V-1)\cdot(V-\delta)/[3V\gamma-2-\delta(\omega-2)])$ — узел. При $\delta=1$ возникает точка $C(V=\omega/\gamma,\ z=(1-V)^2)$ — узел.

Исследование поля интегральных кривых системы уравнений (2.1) в плоскости Vz для случая $V_1=0$ было проведено в [1]. При $V_1\neq0$, $z_1=0$ $(P_1=0)$ начальному состоянию газа в трубе соответствует точка оси V. При переходе через поверхность сильного разрыва точка оси V отражается в точку параболы (2.4), на координаты которой накладываются два ограничения. Первое ограничение состоит в том, что особая точка K должна лежать под параболой (2.4), в противном случае решение задачи не существует, ибо, двигаясь вдоль интегральной кривой, невозможно пройти эту особую точку. Второе ограничение вытекает из требования, чтобы точка параболы (2.4) лежала правее особой точки D, через которую не проходит ни одной интегральной кривой, так как в другом случае решение задачи также отсутствует. Выполнение этих условий гарантирует существование решения задачи.

Дальнейшие качественные исследования интегральных кривых дают тот же результат, что и в [1]. Интерес могут представить асимптотические формулы вблизи контактного разрыва, т. е. вблизи линии $V=\delta$.

Случай первый: $H(\delta, 0)$

$$V=\delta+(\varkappa-\nu\delta)(\lambda-\lambda_1)/\lambda_1,\quad R=a(\lambda-\lambda_1)^{(\omega\delta-\varkappa)/(\varkappa-\nu\delta)} \tag{2.5}$$

$$P=b+\frac{(\delta-1)(\varkappa-\nu\delta)}{\lambda_1(\nu-\omega)}a(\lambda-\lambda_1)^{(\delta(\omega-\nu))/(\varkappa-\nu\delta)}$$

$$z=\gamma\frac{b}{a}(\lambda-\lambda_1)^{-(\omega\delta-\varkappa)/(\varkappa-\nu\delta)},\qquad \varkappa=\frac{2+\delta(\omega-2)}{\gamma}$$

Здесь a, b – постоянные, причем b соответствует давлению на контактной поверхности, а a – первому коэффициенту разложения плотности R в ряд по степеням $(\lambda-\lambda_1)$ вблизи поверхности разрыва. В этих формулах $\lambda>\lambda_1$.

Случай второй: $H(\delta, \infty)$

$$V=\delta+(\varkappa-\nu\delta)(\lambda-\lambda_1)/\lambda_1,\quad R=a(\lambda-\lambda_1)^{(\omega\delta-\varkappa)/(\varkappa-\nu\delta)} \tag{2.6}$$

$$P=b[1+(\omega-2)(\lambda-\lambda_1)/\lambda_1],\qquad z=\gamma\frac{b}{a}(\lambda-\lambda_1)^{-(\omega\delta-\varkappa)/(\varkappa-\nu\delta)}$$

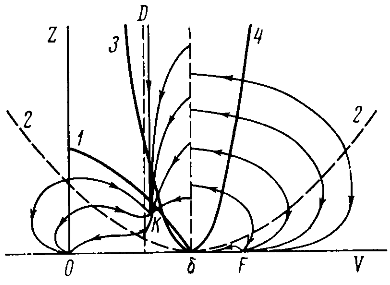
Если z конечно и $z\neq0$, то $\delta=2/(\omega\gamma-\omega+2)$ и асимптотические формулы таковы:

$$V=\delta+(\varkappa-\nu\delta)(\lambda-\lambda_1)/\lambda_1,\quad R=a \tag{2.7}$$

$$P=b[1+(\omega-2)/\lambda_1]-a\delta(\delta-1)(\lambda-\lambda_1)/\lambda_1,\quad z=\gamma b/a$$

Случай $\delta=2/(\omega\gamma-\omega+2)$ соответствует конечной плотности на контактном разрыве (скорость движения разрыва близка к местной скорости звука) и представляет наибольший интерес.

На фиг. 1 для последнего из перечисленных случаев дана картина поля интегральных кривых при $\nu=3$, $\gamma>{}^1/_3$, $0<\omega<3$. Контактный разрыв отмечен штриховой прямой $V=\delta$. Кривая *1* соответствует параболе $z=-\delta(V-\delta)\cdot\cdot(1+(\gamma-1)V/2\delta)$, в точки которой переходят точки оси z, если ударная волна распространяется по покоящемуся газу, кривая *2* — параболе слабых разрывов (2.3), кривые *3*, *4* — параболе (2.4) при $\gamma=\gamma_1$ и γ_2 соответственно.



Фиг. 1

Заметим, что при построении поля интегральных кривых в [1] было отмечено, что входному отверстию трубы соответствует точка $V=\infty$, $z=0$, $\lambda=0$. Следовательно, в области, примыкающей к входному отверстию трубы, можно найти решение, полагая $z=0$. Из равенства $z=0$ следует, что либо $P=0$, либо $R=\infty$. Последнее невозможно, так как предполагается, что плотность газа в трубе остается конечной. Считая, что $P=0$, можно найти продолжение решения по формулам

$$\lambda d_1=(V-1)^{\delta-1}V^\delta,\quad Rd_2=(V-1)^{\nu-\omega}(V-1)^{-1} \tag{2.8}$$

Здесь d_1, d_2 — постоянные, которые легко могут быть определены.

Учитывая, что в области $V>\delta$ интегральные кривые образуют однопараметрическое семейство и что при переходе через контактный разрыв изменение R может быть разрывным, тогда как λ меняется непрерывно, приходим к выводу, что решение будет содержать три неопределенных параметра: λ_0, c_1, c_2.

Их можно определить из трех условий:

а) непрерывности давления на контактном разрыве, используя асимптотические формулы для $z(\lambda)$, $P(\lambda)$, $R(\lambda)$, $V(\lambda)$ вблизи $\lambda=\lambda_1$;

б) равенства массы, заключенной между входным отверстием и контактным разрывом, массе, введенной в трубу через отверстие;

в) равенства полной энергии движущегося газа энергии газа, введенного в трубу через отверстие.

Пусть скорость движения в трубе

$$v_1=\delta(\lambda_0\sqrt{q/n})^{-1/\delta}r^{1-1/\delta}$$

Задача остается автомодельной при $p_1=0$. Для невозмущенного движения газа имеем

$$R_1=1,\quad P_1=0,\quad z_1=0,\quad 0\leqslant V_1\leqslant\delta \tag{2.9}$$

Условия б), в) приобретают следующий вид:

$$\int_0^{\lambda_1} R(\lambda)\lambda^{\nu-\omega-1}\,d\lambda=\frac{q}{(\alpha+1)A_1}\left(\frac{q}{n}\right)^{(\nu-\omega)/2}\lambda_0^{\nu-\omega} \tag{2.10}$$

$$\int_0^1\left[\frac{V^2}{2}+\frac{P}{(\gamma-1)R}\right]R\lambda^{\nu+1-\omega}\,d\lambda+\frac{\delta^3}{2[1+\delta(1+\nu-\omega)]}\times \tag{2.11}$$

$$\times\left[\lambda_0\sqrt{\frac{q}{n}}\right]^{-(\beta+1)/\delta} t^{-(\beta+1)} r^{(2(\delta-1)/\delta)+\nu-\omega}=$$
$$=\frac{n}{A_1(\beta+1)}\left(\frac{q}{n}\right)^{(\nu+2-\omega)/2}\lambda_0^{2+\nu-\omega}$$

Если $v_1=0$, то в левой части уравнения (2.11) пропадает последний член, а уравнение (2.10) не изменяет своего вида.

Задача сводится к определению λ_0, c_1, c_2 по заданным q, n, но практически оказывается более удобным по заданному значению постоянной c_2 из условия непрерывности давления находить c_1, после чего из условий (2.10) и (2.11) определять и некоторую комбинацию q и n, а именно $q(q/n)^{(\nu-\omega)/2}$.

3. Обозначим через ξ лагранжеву начальную координату частицы газа. Очевидно, что для каждой частицы координата ξ равна радиусу ударной волны r_b в момент ее прохождения через частицу.

Рассмотрим конфигурацию слабых межпланетных магнитных полей, возникающих в результате вытягивания силовых линий общего поля Солнца в межпланетное пространство. Для описания магнитных полей примем сферическую систему координат с началом в центре Солнца (см. [2]). Пусть $\mathbf{\Omega}$ – вектор, направленный по оси вращения Солнца; компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$ в точке (r, φ, θ) суть H_r, H_φ, H_θ. Газ считается идеально проводящей средой. Предполагается, что солнечный ветер имеет радиальное направление и переменную скорость $u(\xi)=\eta\xi^{\omega-2}$.

По аналогии с [2] для компонент начального магнитного поля можем написать

$$H_{r_1}=H_{r_0}\left(\frac{r_1}{\xi}\right)^2, \quad H_{\theta_1}=H_{\theta_0}=0, \quad H_{\varphi_1}=H_{r_0}\frac{r_1^2\Omega\sin\theta}{u(\xi)\xi} \tag{3.1}$$

Через H_{r_0}, H_{φ_0}, H_{θ_0} обозначены составляющие поля $\mathbf{H}$ в некоторой точке $(r_1, \varphi_1, \theta_1)$, где образуется силовая линия, проходящая через точку, имеющую лагранжеву координату ξ. Проектируя интеграл вмороженности на направления r, φ, θ, считая, что линии тока мало отклоняются от радиального направления и пользуясь законом сохранения массы, выразим компоненты возмущенного магнитного поля $\mathbf{H}$ через компоненты начального магнитного поля $\mathbf{H}_0$ в случае $\rho_1=A_1\xi^{-\omega}$

$$H_{\theta_1}=H_{\theta_0}=0, \quad \Phi_r=\frac{H_r}{H_{r_0}}=\left(\frac{r_1}{r_b}\right)^2\frac{1}{\lambda^2} \tag{3.2}$$

$$\Phi_\varphi=\frac{H_\varphi}{H_{r_0}\sin\theta}=R(\lambda)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{r_1^2\Omega}{u(\xi)\xi}\left(\frac{\xi}{r_b}\right)^{\omega-1}\lambda \tag{3.3}$$

$$\lambda=r/r_b, \quad R(\lambda)=\rho/\rho_2, \quad \rho_2=A_1r_b^{-\omega}(\gamma+1)/(\gamma-1)$$

Для полного магнитного поля верна формула

$$\Phi=\sqrt{\Phi_r^2+\sin^2\theta\,\Phi_\varphi^2} \tag{3.4}$$

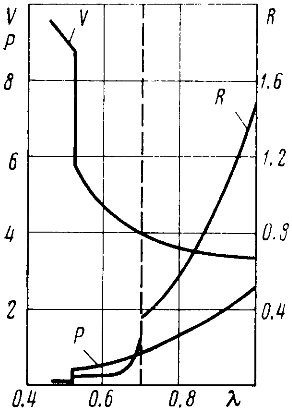
4. Интегрирование системы уравнений (2.1) с начальными условиями

$$V_2=\delta+\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}(V-\delta), \quad R_2=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}, \quad z_2=\frac{2\gamma_1(\gamma_1-1)}{(\gamma_1+1)}(V-\delta)^2 \tag{4.1}$$

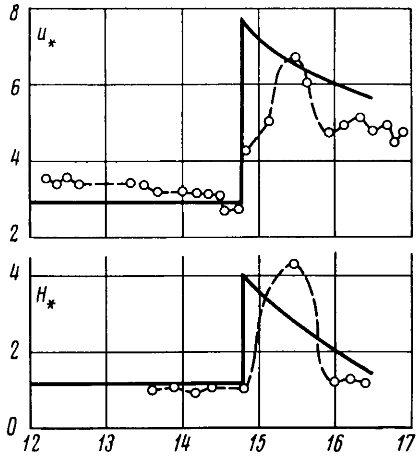
которые получаются из условий на сильных разрывах с использованием (2.9), в области, ограниченной сферическими поверхностями $r_0=0.01$ а.е., $r_2=1.5$ а.е., проводилось численным методом Рунге – Кутта на ЭВМ БЭСМ-4. На фиг. 2 и 3 приведен пример численного решения задачи при

$\nu=3$, $\delta=0.75$, $\gamma_1=\gamma_2=1.3$, $\omega=2.2$, $V_1=0.25$ для случая конечной плотности на контактном разрыве. На фиг. 2 изображены зависимости безразмерных характеристик движения газа от переменной λ, значение которой $\lambda=1$ соответствует ударной волне, идущей по невозмущенному газу. Штриховой линией отмечен контактный разрыв. При $\lambda=0.52$ имеем вторую ударную волну, необходимость введения которой обоснована в [1].

Численное решение задачи позволяет перейти к размерным величинам и построить графики зависимостей параметров межпланетного газа от времени в некоторой точке пространства. В настоящих расчетах координата этой точки произвольно полагалась равной 1 а.е. Будем считать, что на орбите Земли плотность частиц $n_a=10$ *см*$^{-3}$, а скорость солнечного



Фиг. 2



Фиг. 3

ветра $u(\xi)=\eta\xi^{\omega-2}=225$ *км/сек*. В качестве начального значения для напряженности магнитного поля при $r=r_0=0.01$ а.е. примем $H_{r_0}=10^{-3}$ *э*. На фиг. 3 представлены результаты расчетов в сравнении с данными наблюдений по скорости и магнитному полю на орбите Земли [4]. Здесь $u_*=v\cdot 10^{-2}$ *км/сек*, $H_*=H\cdot 10^4$ *э*. Одно деление оси абсцисс соответствует одним суткам, числами отмечены даты проводившихся в феврале 1967 года наблюдений. Сплошные линии соответствуют теории, пунктирные линии и точки — данным наблюдений. Видно, что имеет место качественное совпадение теоретических результатов с данными наблюдений над солнечными вспышками.

Автор благодарит В. П. Коробейникова за полезные советы и внимание к работе.

Поступила 13 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С., Марченко Т. В., Якимов Ю. Л.* О нестационарных движениях газа в ударных трубах переменного сечения. ПМТФ, 1961, № 4.
2. *Коробейников В. П., Николаев Ю. М.* Ударные волны и конфигурации магнитных полей в межпланетном пространстве. Cosmic Electrodynamics, 1972, vol. 3, No. 1.
3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.
4. *Hundhausen A. I.* Interplanetary shock waves and the structure of solar wind disturbances. Solar Wind. Proc. Conf. Nat. Aeronaut. and Space Admin. 1971. Washington, D. C., 1972.