

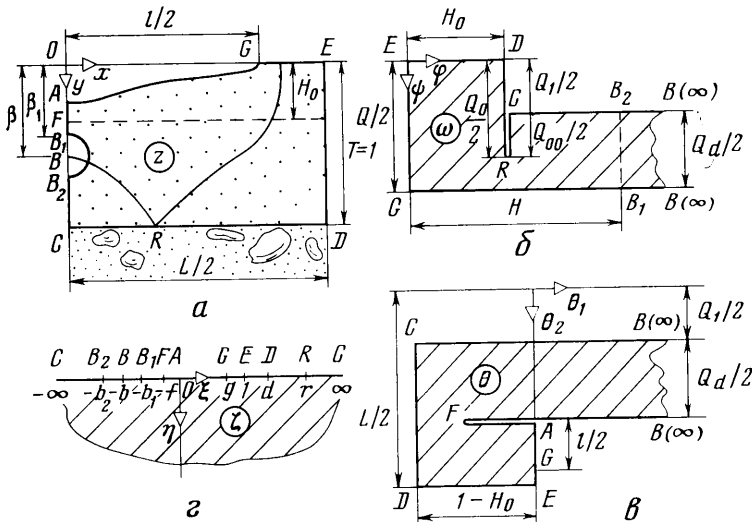
ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ПРОМЫВКАХ ПОЧВЕННОГО СЛОЯ С НИЖЕЛЕЖАЩИМ НАПОРНЫМ ГОРИЗОНТОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫСОКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В. Н. ЭМИХ

(Новосибирск)

В работах [1, 2] исследовалась плоская установившаяся фильтрация при дренажных промывках почвенного слоя с непроницаемым основанием. На многих территориях непосредственно под покровной толщей залегает высокопроницаемый напорный горизонт, существенно влияющий на течение в промываемом слое. Ниже рассматриваются гидродинамические модели такого течения.

1. Промывка с дренажем. На фиг. 1 в предположении о периодичности течения схематично представлена левая половина одного из периодов — междриений. Введем величины $z = z/T$, $\omega = \omega/\kappa T$, где $z = x + iy$ — комплексная координата точек области течения, $\omega = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, T — мощность почвенного слоя, κ — его коэффициент фильтрации;



Фиг. 1

индекс далее будем опускать. Положим $\varphi|_{GE} = \psi|_{ED} = 0$, $\varphi|_{CD} = H_0 = \text{const}$ (постоянство напора H_0 обусловлено предпосылкой о высокой проницаемости нижележащего напорного горизонта). В общем случае фильтрация в почвенном слое происходит при наличии подпора со стороны вод подстилающего горизонта и, следовательно, $H_0 < 1$ (фиг. 1, а).

В зависимости от соотношения между напорами на дрене, на полосе затопления и в нижележащем горизонте возможно несколько вариантов

течения; с качественной стороны они характеризуются тем или иным положением нейтральной точки R , разделяющей на границе области z потоки разных направлений (в этой точке граничные значения потенциала или функции тока достигают максимума, а скорость течения равна нулю) [3]. Так, при $R \in ED$ вся промывная вода поступает через грунт в дрена вместе с водами из нижележащего горизонта; при $R \in BC$ дрена блокируется от него за счет части потока с полосы затопления; наконец, в случае $R \in CD$, которому соответствуют фиг. 1, а и б, напорный горизонт дренирует почвенный слой на участке RD , а через участок CR сам питает дрена.

Область функции Жуковского $\theta = \omega + iz$ является, как и область ω , многоугольником с прямолинейными границами (фиг. 1, в). Конформно отображая области ω и θ на полуплоскость $\text{Im } \xi \geq 0$ (фиг. 1, г), найдем [4, 5]

$$(1.1) \quad \omega = \frac{(1+b)\sqrt{d-g}}{2(b+r)} M \int_{\xi}^g \frac{(r-\xi) d\xi}{(b+\xi)\sqrt{(g-\xi)(1-\xi)(d-\xi)}} + i \frac{Q}{2} =$$

$$= M \left[\frac{1-g}{b+g} \Pi \left(\alpha(\xi), \frac{1+b}{b+g}, \lambda \right) + \frac{r-1}{b+r} F(\alpha(\xi), \lambda) \right] + i \frac{Q}{2}$$

$$(1.2) \quad \theta = - \frac{(1+b)\sqrt{d}}{2(b-f)} M_0 \int_{\xi}^0 \frac{(f+\xi) d\xi}{(b+\xi)\sqrt{-\xi(1-\xi)(d-\xi)}} + i \frac{Q}{2} =$$

$$= M_0 \left[\frac{1}{b} \Pi \left(\alpha_0(\xi), \frac{1+b}{b}, \lambda_0 \right) - \frac{1+f}{b-f} F(\alpha_0(\xi), \lambda_0) \right] + i \frac{Q}{2} =$$

$$= \omega_0 + NF(\alpha(\xi_0), \lambda_0)$$

$$(1.3) \quad M = \frac{Q_d}{\pi} \sqrt{\frac{(b+g)(b+d)}{(1+b)(d-g)}}, \quad \alpha(\xi) = \arcsin \sqrt{\frac{g-\xi}{1-\xi}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{d-1}{d-g}}$$

$$N = M_0 \frac{(1+b)(f+r)}{(b-f)(b+r)}, \quad M_0, \omega_0, \alpha_0, \lambda_0 = (M, \omega, \alpha, \lambda) \quad g=0$$

$$F(\arcsin x, k) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$\Pi(\arcsin x, n, k) = \int_0^x \frac{du}{(1-nu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

Здесь Q_d и Q — фильтрационные расходы на единицу длины дрены и полосы затопления соответственно; F , Π — эллиптические интегралы.

Вычитая (1.1) из (1.2), получим представление для z

$$(1.4) \quad z = i[\omega - \omega_0 + NF(\alpha_0(\xi), \lambda_0)]$$

В прямой физической постановке дрена можно схематизировать одним из следующих способов: 1) ординатой β стока B в плоскости z и его дебитом Q_d с последующим определением параметра b ; 2) ординатами стока B и некоторой точки на поверхности дрены, например точки B_1 , с заданным в ней значением потенциала (фиг. 1, а, б, г); абсциссы b и b_1 точек B и B_1 в плоскости ξ подлежат при этом определению наряду с расходом дрены Q_d ; 3) ординатами точек B_1 и B_2 на дрене с заданным в них значением потенциала при последующем нахождении параметров b , b_1 , b_2 и Q_d [2, 6].

Кроме характеристик дрены следует задать также координаты точек G, E, D (или C) в плоскости z и потенциал H_0 на участке CD . Основываясь на равенствах (1.1) и (1.2) и преобразуя содержащиеся в них интегралы для соответствующих граничных участков [4, 5], получим некоторую систему уравнений относительно параметров отображения b, g, d, f и r , которую при первом из вышеперечисленных способов схематизации дрены можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad H_0 &= K \left(M \frac{r-1}{b+r} - \frac{Q_d}{\pi} Z \right) = G \quad \left(Z = F(\alpha(-b), \lambda) - \Phi E \right) \\
 \Phi &= \frac{F(\alpha(-b), \lambda)}{K}, \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right), \quad E = E\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \\
 1 - H_0 &= NK_0 - G_0 \quad \left(K_0 = F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right), \quad G_0 = G|_{g=0} \right) \\
 \frac{L}{2} &= (1 - H_0)\Lambda_0 + H_0\Lambda + \frac{Q_d}{2}(\Phi - \Phi_0) \\
 \left(\Lambda &= \frac{K'}{K}, \quad K' = F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda'\right), \quad \lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \Lambda_0, \quad \Phi_0 = (\Lambda, \Phi)_{g=0} \right) \\
 \frac{l}{2} &= M_0(1+b) \left[\frac{F(\arcsin \sqrt{g}, \lambda_0')}{b-f} - \frac{\Pi(\arcsin \sqrt{g}, -1/b, \lambda_0')}{b} \right] \\
 (\lambda_0' &= \sqrt{1 - \lambda_0^2}) \\
 \beta &= y_A + NF(\alpha_0(-b), \lambda_0) - \frac{Q_d}{2\pi} \frac{g\sqrt{(1+b)(b+d)}}{b+r} \times \\
 &\times \int_0^b \frac{(r+u) du}{[\sqrt{b(g+u)} + \sqrt{(b+g)u}] \sqrt{u(g+u)} (1+u)(d+u)} \\
 E(\arcsin x, k) &= \int_0^x \sqrt{(1-k^2u^2)/(1-u^2)} du
 \end{aligned}$$

Здесь E — эллиптический интеграл.

Выражение для y_A — максимальной глубины кривой депрессии — найдем из (1.1); с помощью первого соотношения (1.5) его можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad y_A &= H_0 - H_0 \frac{F(\arcsin \sqrt{(d-g)/d}, \lambda)}{K} + \\
 &+ \frac{Q_d}{\pi} \left[ZF(\alpha(0), \lambda) + \frac{(1-g)\sqrt{b+d}}{\sqrt{(1+b)(b+g)(d-g)}} \Pi\left(\alpha(0), \frac{1+b}{b+g}, \lambda\right) \right]
 \end{aligned}$$

В естественном состоянии уровень грунтовых вод в почвенном слое устанавливается на глубине H_0 , совпадая с поверхностью пьезометрического напора в нижележащем горизонте. Запись (1.6) отражает изменение уровня под воздействием двух взаимно противоположных факторов: поступления промывных вод и дренирования.

В результате исследования системы (1.5) с использованием свойств эллиптических интегралов [1] устанавливается, что при фиксировании параметра b ($0 < b < \infty$) и величин H_0 , L и l параметры g и d однозначно определяются из третьего и четвертого уравнений системы, далее из первых двух уравнений найдем параметры r и f . Величина β окажется при этом «плавающей»: ее значение определится последним соотношением (1.5).

Для расхода Q промывной воды имеем

$$(1.7) \quad Q = 2H_0\Lambda + Q_d(1 - \Phi)$$

В случае $R \in CD$ расходы Q_0 и Q_{00} воды, перетекающей в пределах одного междуренья через подошву почвенного слоя вниз и вверх соответственно (фиг. 16), определяются зависимостями

$$Q_0 = 2M \left[\frac{r-1}{b+r} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{r-d}{r-1}}, \lambda' \right) - \frac{d-1}{b+d} \Pi \left(\arcsin \sqrt{\frac{r-d}{r-1}}, \frac{1+b}{b+d}, \lambda' \right) \right]$$

$$Q_{00} = Q_0 - Q_1 = Q_0 - Q + Q_d$$

Если дренажный расход Q_d неизвестен, то, задавая напор в точке B_1 : $h(B_1) = -H$ (положительная полуось отсчета напоров направлена вверх), и полагая в (1.1) и (1.4) $\xi = -b_1$, $\omega = H + iQ/2$, $\omega_0 = \varphi_0(-b_1) + iQ/2$ ($\varphi_0 = \varphi|_{g=0}$), $z = i\beta_1$, получим соотношения, которые следует присоединить к системе (1.5) (параметр b_1 подлежит определению).

$$H = \varphi(-b_1) = M \left[\frac{1-g}{b+g} \Pi \left(\alpha(-b_1), \frac{1+b}{b+g} \lambda \right) + \frac{r-1}{b+r} F(\alpha(-b_1), \lambda) \right]$$

$$\beta_1 = NF(\alpha_0(-b_1), \lambda_0) + \varphi(-b_1) - \varphi_0(-b_1)$$

Исследуем некоторые детали формы кривой депрессии AG . Исходя из (1.1) и (1.2), представим ее уравнение в интегральной комплексно-параметрической форме

$$(1.8) \quad z = \frac{Q_d \sqrt{(1+b)(b+d)}}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{b}}{b-f} \int_0^{\xi} \frac{(f+\zeta) d\zeta}{(b+\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)(d-\zeta)}} + \right. \\ \left. + i \frac{\sqrt{b+g}}{b+r} \int_{\xi}^g \frac{(r-\zeta) d\zeta}{(b+\zeta)\sqrt{(g-\zeta)(1-\zeta)(d-\zeta)}} \right], \quad 0 \leq \xi \leq g$$

Отсюда получаем

$$(1.9) \quad \frac{dy}{dx} = -B \frac{(r-\xi)\sqrt{\xi}}{(f+\xi)\sqrt{g-\xi}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{B}{2} \frac{P(\xi)}{(f+\xi)^2 \sqrt{\xi(g-\xi)^3}} \frac{d\xi}{dx}$$

$$B = \sqrt{\frac{b+g}{b}} \frac{b-f}{b+r}, \quad P(\xi) = (2r+2f-g)\xi^2 - g(3f+r)\xi + fgr$$

Первое равенство отражает монотонный спад кривой депрессии в направлении к дрене, ибо $(dy/dx) < 0$ при $0 < \xi < g$. Далее, в силу (1.8) имеем $(d\xi/dx) > 0$ при $0 < \xi < g$ и, следовательно, $\text{sign}(d^2y/dx^2) = -\text{sign}[P(\xi)/(b+r)]$ (заметим, что $b+r < 0$, если $R \in BC$). При этом в зависимости от знака дискриминанта $D = gr^2(1+f/r)(g-8f+9fg/r)$ трехчлена $P(\xi)$ возможны два случая.

1) $D > 0$, что равносильно неравенству

$$(1.10) \quad g - 8f + 9fg/r > 0$$

Трехчлен $P(\xi)$ имеет в этом случае два простых вещественных корня: r_1 и r_2 ; нетрудно проверить, что $r_1, r_2 \in (0, g)$. Если при этом $r_2 < r_1$, то $d^2y/dx^2 < 0$ при $f < \xi < r_2$

и $r_1 < \zeta < g$; $d^2y/dx^2 > 0$ при $r_2 < \zeta < r_1$. Таким образом, при выполнении (1.10) кривая депрессии имеет две точки перегиба: $R_1(r_1)$ и $R_2(r_2)$, ограничивающие участок выпуклости кривой.

2) $D < 0$; $d^2y/dx^2 < 0$ при $0 < \zeta < g$, и кривая депрессии вогнута на всем своем протяжении.

Неравенство (1.10) заведомо выполняется при малых значениях f . Как отмечалось ранее [2, 6, 7], предельный случай $f=0$ с превращением точки A в точку заострения обусловлен поддержанием на дрене давления ниже атмосферного. Естественно поэтому связать уменьшение параметра f , сопутствующее в силу (1.10) появлению на кривой депрессии точек перегиба, с понижением давления на дрене. Напротив, при малых g имеем $D < 0$ и с учетом четвертого соотношения (1.5) заключаем, что расширение полосы затопления способствует исчезновению точек перегиба. Конечно, эти выводы, как и аналогичные заключения, сделанные ранее для схемы с водоупором [1], условны: согласно (1.5) каждый из физических параметров, определяющих процесс, связан, вообще говоря, со всеми параметрами отображения.

Рассмотрим функцию $1/w$, где $w = w_x - iw_y$ — комплексная скорость фильтрации. Исходя из (1.1) и (1.2), найдем

$$(1.11) \quad \frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = i - \frac{(f+\xi)\sqrt{g-\xi}}{B(r-\xi)\sqrt{\xi}} = i - \frac{1}{2B} \int_{\xi}^g \frac{(\xi-r_1)(\xi-r_2)d\xi}{(r-\xi)^2\sqrt{\xi^3(g-\xi)}}$$

Величина B определена в (1.6); r_1 и r_2 — корни трехчлена $P(\xi)$.

При $r \rightarrow \infty$ получаем из (1.11) представление для $1/w$ в случае пласта неограниченной мощности [7]; в этой схеме точка C , для которой $\xi = \infty$, является точкой нулевой скорости. Поскольку положение последней на участке $EDCB$ не влияет на вид годографа скорости, структура областей \bar{w} и $1/w$ в рассматриваемой модели совершенно та же, что и в указанном предельном случае. Остаются в силе все сделанные ранее при исследовании этого случая [7] заключения о характере двулистности годографа во взаимосвязи с отмеченными выше особенностями кривой депрессии.

Как уже говорилось, одной из предпосылок рассматриваемого процесса является подпериодный режим фильтрации, обусловленный неравенством $H_0 < 1$. При $H_0 \rightarrow 1$ на плоскости θ (фиг. 1, в) вырождается в точку $\theta = iL/2$ граничный участок DE , а следовательно (согласно теореме единственности аналитической функции [8]), и вся область фильтрации; в результате имеем $\omega = i(L/2 - z)$, что соответствует одномерной свободной фильтрации по вертикали под полосой затопления ($l/2 \leq x \leq L/2$); дрена в этом случае не работает.

Остановимся на нескольких частных моделях течения.

1°. В приближенной постановке [2, 3] при замене кривой депрессии участком AOG (фиг. 1) область фильтрации становится прямоугольником и, следовательно,

$$(1.12) \quad z = LF(\arcsin \sqrt{\xi}, \sqrt{1/d})/2K(\sqrt{1/d}) \\ \xi = \operatorname{sn}^2 [2zK(\sqrt{1/d})/L, \sqrt{1/d}]$$

Для ω сохраняется представление (1.1). Параметр d находится из соотношения $L/2 = K(\sqrt{1/d})/K(\sqrt{1-(1/d)})$; параметры b и g получаем постановкой координат точек B и G ($z = i\beta$ и $z = l$) во вторую зависимость (1.12). Далее из первых равенств (1.5) и (1.12) последовательно определяются параметр r и координата z_R нейтральной точки R .

2°. Для случая полного затопления, когда приближенная модель совпадает с точной, решение выражается равенствами (1.12) и (1.1) при $g=0$. Параметры g , b и r определяются по схеме, описанной выше для приближенной постановки.

3°. При неограниченном возрастании мощности промываемого слоя, когда точки C , R и D сливаются на бесконечности в плоскостях z и ζ ($d, r \rightarrow \infty$), приходим к задаче, рассмотренной в [7].

4°. В случае одиночной дрены $d=1$ и вместо (1.1) и (1.2) имеем

$$\omega = \frac{Q_d}{\pi} \left(\operatorname{arth} \sqrt{\frac{g-\zeta}{b+g}} + \frac{r-1}{b+r} \sqrt{\frac{b+g}{1-g}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{g-\zeta}{1-g}} \right) + i \frac{Q}{2}$$

$$\theta = i \frac{Q_d}{\pi} \left(\frac{1+f}{b-f} \sqrt{b} \operatorname{arth} \sqrt{\zeta} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\zeta}{b}} \right) + i \frac{Q}{2}$$

5°. В межпромывной период в случае, когда поверхность пьезометрического напора грунтовых вод нижележащего горизонта превышает уровень заложения дрен ($H_0 < \beta$), последние продолжают дренировать почвенный слой, сбрасывая напорные воды. Аналогичная задача рассматривалась ранее в несколько более общей постановке при наличии равномерной инфильтрации на свободную поверхность [9].

2. Бездренажная промывка. Если в схеме с водоупором искусственный дренаж является единственным средством отвода промывных вод с растворенными в них солями, то в рассматриваемой модели дренирование почвенного слоя может осуществляться целиком за счет нижележащего горизонта, причем не только в отмеченном выше случае свободной одномерной фильтрации, но и при наличии подпора, когда $H_0 < 1$. Возникающее при этом течение схематично представлено на фиг. 2, а для левой половины зоны влияния одной из периодически повторяющихся полос затопления. В случае одиночной полосы течение исследовалось ранее в [10].

Конформно отображая области ω и θ на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta \geq 4$ (фиг. 2, б - г), найдем, используя обозначения (1.3) и (1.5)

$$(2.1) \quad \omega = i(Q/2 - H_0 \Psi), \quad \theta = \omega_0 + i\Psi_0$$

$$\Psi = F \left(\operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{\zeta - g}{1 - g}}, \lambda' \right) / K, \quad \Psi_0 = \Psi|_{g=0}$$

Отсюда имеем

$$(2.2) \quad z = i(\omega - \theta) = (1 - H_0) \Psi_0 + H_0 \Psi$$

Последовательно полагая в (2.2) $\zeta = g$, $z = l/2$ и $\zeta = 1$, $z = L/2$, получим (ср. с (1.5))

$$(2.3) \quad l/2 = (1 - H_0) F(\operatorname{arcsin} \sqrt{g}, \lambda_0') / K_0, \quad L/2 = (1 - H_0) \Lambda_0 + H_0 \Lambda$$

Из первого равенства (2.3) найдем $g = \operatorname{sn}^2[lK_0/2(1 - H_0), \lambda_0']$, где sn — эллиптическая функция Якоби [4, 5]. Внося это выражение в правую часть второго соотношения (2.3), получим уравнение $L = L(d)$. Используя формулы дифференцирования эллиптических интегралов, можно показать, что $dL(d)/dd < 0$, причем $L(1) = \infty$, $L(\infty) = 0$ и, таким образом, упомянутое уравнение имеет единственный корень d_* при любом $L > 0$. Последний содержится в промежутке $[d_0, d_1]$, где d_0 и d_1 — корни уравнения $L = L(d)$ при $g = 1$ и $g = 0$ соответственно (согласно второму равенству (2.3) $dd/dg < 0$ при $L = \operatorname{const}$). Итак, при заданных величинах L , l и H_0 система (2.3) однозначно разрешается относительно параметров отображения g и d .

Полагая в (2.1) $\xi=1$, $\omega=0$, получим (ср. с (1.7))

$$Q=2H_0\Lambda$$

Обратимся к кривой депрессии; как и прежде, запишем ее уравнение в интегральной комплексно-параметрической форме

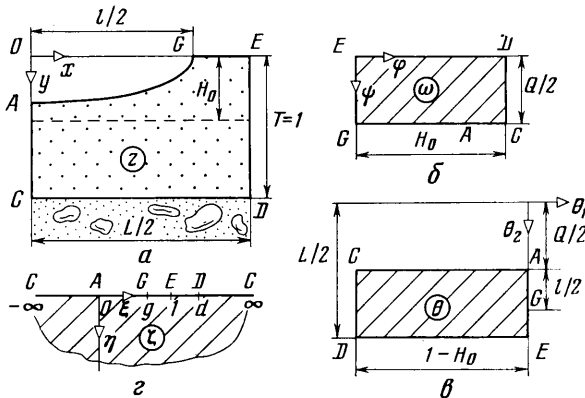
$$(2.4) \quad z = \frac{(1-H_0)\sqrt{d}}{2K_0} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(d-\xi)}} + i \frac{H_0\sqrt{d-g}}{2K} \int_{\xi}^g \frac{d\xi}{\sqrt{(g-\xi)(1-\xi)(d-\xi)}}$$

Исходя из этого представления, имеем

$$\frac{dy}{dx} = -A \sqrt{\frac{\xi}{g-\xi}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A}{2} \frac{g}{\sqrt{\xi}(g-\xi)^3} \frac{d\xi}{dx}$$

$$A = \frac{H_0}{1-H_0} \sqrt{\frac{d-g}{d}} \frac{K_0}{K}$$

В силу (2.4) $d\xi/dx > 0$ и $d^2y/dx^2 < 0$ при $0 < \xi < g$, т. е. кривая депрессии в данном случае вогнута на всем своем протяжении независимо от соотношения между физическими параметрами. Таким образом, отмечавшаяся в



Фиг. 2

п. 1 возможность появления на кривой своеобразной впадины между участками ее выпуклости всецело обусловлена искусственным дренированием потока.

Полагая в (2.1) $\xi=0$, $\omega=\varphi(0)+iQ/2=y_A+iQ/2$, найдем $y_A = H_0 F(\arcsin \sqrt{g}, \lambda)/K$.

Можно показать, что $dy_A/dl > 0$, причем $y_A=0$ при $l=0$, $y_A=H_0$ при $l=1$. Отсюда следует, что если дрены заложены выше поверхности пьезометрического напора вод нижележащего горизонта, т. е. $\beta < H_0$, то на некоторой начальной стадии расширения полосы затопления поток грунтовых вод не захватывается дренажами и целиком уходит в подстилающий горизонт. Начиная со значения $l_* = l(g_*)$, где g_* — корень уравнения $H_0 F(\arcsin \sqrt{g}, \lambda)/K = \beta$ (согласно вышесказанному этот корень существует и является единственным при $0 < \beta < H_0$), дренажный сток окажется затопленным.

Если при последующем уменьшении l гидродинамический напор потока хотя бы на некоторой части поверхности дрены превысит определенную для данной дрены величину H (см. стр. 73), преодолев тем самым входное сопротивление фильтра и напор внутри дрены, то последняя вступит в действие, а течение будет описываться моделью, рассмотренной в п. 1.

Поступила 21 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Эмих В. Н. Решение задачи о плоской безнапорной установившейся фильтрации при дренажных промывках почв с непроницаемым основанием. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6.
2. Эмих В. Н. Фильтрация грунтовых вод при дренажных промывках почвенного слоя с непроницаемым основанием. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
3. Полубаринова-Кочина П. Я., Эмих В. Н. Упрощенные схемы движения грунтовых вод при промывках. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 2. Новосибирск, «Наука», 1969.
4. Byrd P. F., Friedmann M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin, Heidelberg, New York. Springer — Verlag, 1971.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М. — Л., Госстройиздат, 1939.
7. Эмих В. Н. Плоская безнапорная фильтрация при дренажных промывках почвенного слоя неограниченной мощности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
9. Ведерников В. В. К теории дренажа. Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 6.
10. Нумеров С. Н. О фильтрации из каналов деривационных ГЭС и ирригационных систем. Изв. Всес. науч.-исслед. ин-та гидротехники, 1974, т. 34.