

**ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ  
В НЕОДНОРОДНОМ ПРОДУКТИВНОМ ПЛАСТЕ**

**А. В. КОРОЛЕВ**

(Москва)

Предлагается конечно-разностный метод решения уравнений фильтрации двухфазной жидкости к скважине, частично вскрывающей нефтяной пласт. Результаты расчета динамики обводнения скважины сравниваются с решениями, полученными методом зональной линеаризации [1].

Известно, что в случае разновесомых жидкостей возможно образование стационарных конусов. Многие авторы [2-4], исходя из допущений о распределении потенциала в нефтенасыщенной части пласта, определяли максимально возможный безводный дебит, соответствующий стационарному конусу. При динамическом подходе стационарный конус отыскивается как предел его промежуточных положений. В работе [5] прослеживалась граница раздела между водой и нефтью вплоть до ее выхода на стационарное положение и определялись предельные дебиты для различных степеней вскрытия.

В данной работе также используется динамический подход, однако стационарный водный конус определяется как предельное состояние двухфазного конуса, которое достигается в результате подъема конуса с одновременной сегрегацией жидкостей.

Разностным методом рассчитывается динамика образования конусов, определяются предельные безводные дебиты и сравниваются с дебитами, полученными по теории стационарного конуса Маскета — Чарного [4].

1. Рассматривается полубесконечный пласт с непроницаемой кровлей, первоначальный нефтенасыщенный слой которого мощности  $H$  вскрыт на глубину  $b$  вертикальным линейным стоком — скважиной с объемным расходом  $Q$ . Водонасыщенная мощность пласта бесконечна (фиг. 1, 1 — вода, 2 — нефть). Жидкости предполагаются несжимаемыми и несмешивающимися, пласт неоднородный и анизотропный, капиллярный эффект не учитывается.

Уравнения совместной фильтрации воды и нефти могут быть записаны в виде

$$(1.1) \quad w_r = - \left( \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right) k_r \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$(1.2) \quad w_z = - \left( \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right) k_z \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{f_1 \gamma_1}{\mu_1} + \frac{f_2 \gamma_2}{\mu_2} \right) k_z$$

$$(1.3) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

$$(1.4) \quad w_{1r} = w_r \varphi, \quad w_{1z} = w_z \varphi + \Delta \gamma k_z \varphi \frac{f_2}{\mu_2}, \quad \varphi = f_1 / (f_1 + \mu_0 f_2)$$

$$(1.5) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_{1r}) + \frac{\partial w_{1z}}{\partial z} + m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Здесь  $k_r(r, z)$ ,  $k_z(r, z)$  — компоненты абсолютной проницаемости среды вдоль координатных осей  $r$  и  $z$ ;  $m$  — пористость;  $p$  — давление;  $\sigma$  — водо-

насыщенность;  $f_i$  — относительная фазовая проницаемость для  $i$ -й фазы;  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ ,  $\gamma_i = \rho_i g$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\rho_i$ ,  $\mu_i$  — плотность и вязкость  $i$ -й фазы;  $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$ ,  $w$ ,  $w_1$  — суммарная скорость жидкости и скорость первой (водной) фазы; индексы  $r$  и  $z$  определяют соответствующие компоненты скоростей,  $t$  — время.

Для однородно-анизотропного пласта с коэффициентом анизотропии  $\lambda^2 = k_r/k_z$  заменой переменных

$$(1.5) \quad \xi = \frac{r}{\lambda H}, \quad \eta = \frac{z}{H}, \quad \tau = \frac{3Qt}{2\pi m \lambda^2 H^3}, \quad \Phi = \frac{2\pi k_r H}{3\mu_2 Q} (p - \gamma_2 z)$$

уравнения (1.1) — (1.4) могут быть преобразованы к виду

$$(1.6) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tau} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{f_i}{\mu_{oi}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{f_i}{\mu_{oi}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - G_i \right) \right] = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1$$

$$G_i = \frac{2\pi k_r H^2 \Delta\gamma_i}{3Q\mu_2}, \quad \mu_{oi} = \mu_i/\mu_2, \quad \Delta\gamma_i = \gamma_i - \gamma_2$$

Здесь индекс  $i=1$  относится к воде,  $i=2$  — к нефти. Условие непроницаемости кровли и граничное условие на эксплуатационной скважине до прорыва воды имеют вид

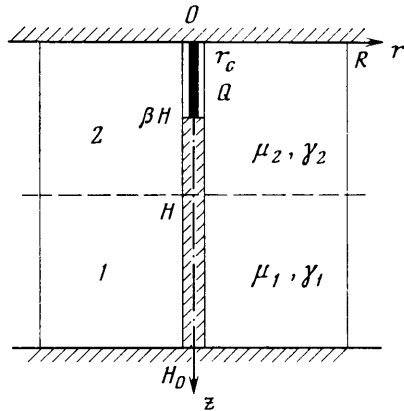
$$(1.7) \quad \frac{f_i}{\mu_{oi}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - G_i \right) = 0 \quad (\eta=0)$$

$$(1.8) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{1}{3\beta} \quad (\eta \leq \beta)$$

Здесь  $\beta = b/H$  — степень вскрытия пласта скважиной. После прорыва воды в скважину общий расход  $Q$  распределяется по длине скважины так, что поток жидкости через единицу длины пропорционален ее подвижности.

Начальные условия

$$(1.9) \quad \sigma(\xi, \eta, 0) = \begin{cases} 0, & \eta \leq 1 \\ 1, & \eta > 1 \end{cases}$$



Фиг. 1

соответствуют предельным значениям на кривых относительных фазовых проницаемостей.

Рассматривая уравнения фильтрации (1.6) с граничными и начальными условиями (1.7) — (1.9), можно заключить, что распределения водонасыщенности  $\sigma$  и потенциала  $\Phi$  — функции  $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \tau, G_1, \mu_0, \beta)$ ,  $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \tau, G_1, \mu_0, \beta)$  трех переменных  $\xi, \eta, \tau$  и трех параметров  $G_1, \mu_0, \beta$ , характеризующих соответственно различие плотностей жидкостей, отношение вязкостей и степень вскрытия пласта. Это, в частности, означает, что динамика обводнения скважины подошвенной водой в произвольном однородно-анизотропном пласте с коэффициентом анизотропии  $\lambda^2$  может быть получена пересчетом времени и координат по формулам (1.5) из решения для соответствующего ему однородного изотропного пласта.

2. Для решения системы (1.1) — (1.4) воспользуемся методом конечных разностей. Аппроксимация дифференциальных уравнений осуществляется

на сетке с целыми  $(r_i, z_j, t^n)$  и полуцелыми  $(r_{i-1/2}, z_j, t^n)$ ,  $(r_i, z_{j-1/2}, t^n)$ , узлами, взятыми в пространстве  $(rzt)$ . Здесь  $r_i = r_{i-1} + h_{ri}$ ,  $z_j = z_{j-1} + h_{zj}$ ,  $t^n = t^{n-1} + \tau_{n-1}$ ,  $i=1, 2, \dots$ ,  $j=1, 2, \dots$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $r_0 = r_c$ ,  $z_0 = 0$ ,  $t^0 = 0$ ,  $r_{i-1} < r_{i-1/2} < r_i$ ,  $z_{j-1} < z_{j-1/2} < z_j$ .

Учитывая возможность существования разрывов абсолютной проницаемости, «висячих» (неподвижных) и движущихся скачков насыщенности [6], при построении разностной схемы исходим из законов сохранения, записанных в интегральной форме, причем в качестве областей интегрирования берутся ячейки, ограниченные поверхностями  $r = r_{i-1/2}$ ,  $z = z_{j-1/2}$ ,  $t = t^n$  и  $t = t^{n+1}$ .

Разностный аналог закона сохранения жидкости возьмем в виде

$$(2.1) \quad 2\pi [(rw_r)_{i+1/2,j}^n - (rw_r)_{i-1/2,j}^n] (z_{j+1/2} - z_{j-1/2}) + \\ + \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) (w_{zi,j+1/2}^n - w_{zi,j-1/2}^n) = 0$$

Выражения для скоростей в полуцелых (поточковых) точках получаем используя интегроинтерполяционный метод

$$(2.2) \quad (rw_r)_{i-1/2,j}^n = k_{ri-1/2,j} \left( \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right)_{i-1/2,j}^n (p_{i-1,j}^n - p_{i,j}^n) / \ln \frac{r_i}{r_{i-1}} \\ w_{zi,j-1/2}^n = k_{zi,j-1/2} \left[ \left( \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right)_{i,j-1/2}^n \frac{p_{i,j-1}^n - p_{i,j}^n}{z_j - z_{j-1}} + \left( \frac{f_1 \gamma_1}{\mu_1} - \frac{f_2 \gamma_2}{\mu_2} \right)_{i,j-1/2} \right]$$

Коэффициенты в поточковых точках в выражениях (2.2) вычисляются по значениям в соседних целых точках.

Закон сохранения водной фазы, записанный в интегральной форме, аппроксимируется разностными уравнениями

$$(2.3) \quad 2\pi [(rw_{1r})_{i+1/2,j}^n - (rw_{1r})_{i-1/2,j}^n] (z_{j+1/2} - z_{j-1/2}) \tau_n + \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \times \\ \times (w_{1zi,j+1/2}^n - w_{1zi,j-1/2}^n) \tau_n + \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) (z_{j+1/2} - z_{j-1/2}) (\sigma_{i,j}^{n+1} - \sigma_{i,j}^n) = 0$$

Уравнения (2.3) представляют собой явную консервативную разностную схему для определения насыщенности, поэтому при использовании уголкового шаблона для обеспечения устойчивости аппроксимация конвективных членов уравнения осуществляется с учетом характеристических направлений. В предположении  $w_r, w_z, \Delta \gamma \geq 0$ , например, используется следующая аппроксимация фазовых скоростей:

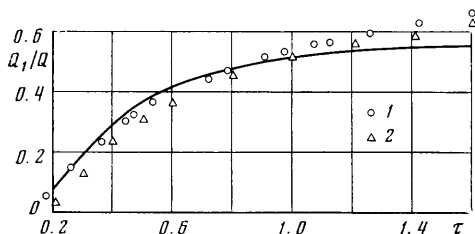
$$(2.4) \quad w_{1ri+1/2,j}^n = w_{ri+1/2,j}^n \Phi_{i,j}^n \\ w_{1zi,j+1/2}^n = w_{zi,j+1/2}^n \Phi_{i,j}^n + \Delta \gamma k_{zi,j+1/2} \Phi_{i,j}^n \left( \frac{f_2}{\mu_2} \right)_{i,j+1}^n$$

Построенная разностная схема имеет первый порядок точности относительно пространственных и временных шагов разностной сетки, устойчива при ограничении на временной шаг типа условия Куранта. Система уравнений (2.1), (2.2), связывающая значения давлений в целых точках, решается итерационным методом последовательной верхней релаксации по линиям.

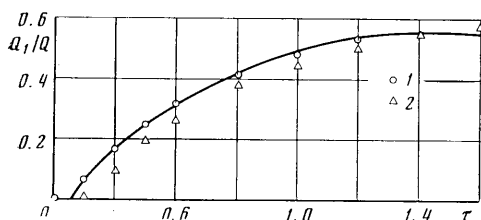
3. Разностная схема использовалась для расчета процесса обводнения несовершенной скважины подошвенной водой как при равных, так и при различных плотностях воды и нефти. В последнем случае исследовалась возможность образования стационарных конусов воды и обеспечения безводных дебитов.

Результаты расчета процесса обводнения скважины в предположении  $\Delta\gamma=0$  сравниваются с решением, полученным методом зональной линейризации [1].

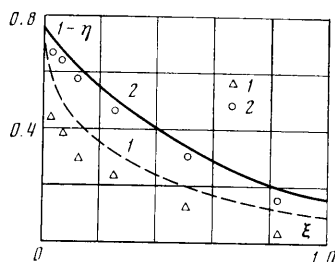
При решении поставленной задачи конечно-разностным методом исходная область и граничные условия трансформируются. Численные расчеты проводились в области конечных размеров  $r_c \leq r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq H_0$ . По оценкам [7] непроницаемая граница  $z=H_0$  слабо влияет на показатели процесса при  $H_0 \geq 2H$ , что было отмечено и в настоящих расчетах. Величина радиуса  $R$  внешней границы области выбиралась так, чтобы в течение рассматриваемого периода эксплуатации скважины заданное гидростатическое распределение давления на внешней границе не приводило к вертикальным перетокам вблизи нее. Это условие означает, что скорости жидкости на



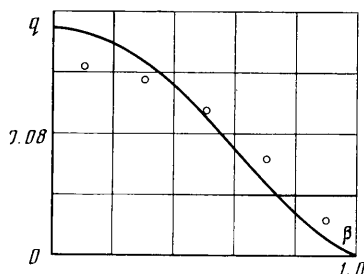
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

внешней границе пропорциональны произведению подвижности жидкости на абсолютную проницаемость в соответствующей точке. Расчеты показывают, что в случае однородного изотропного пласта достаточно взять  $R=(2 \div 3)H_0$ .

Если на внешней границе насыщенность согласована с начальным распределением, вследствие равенства нулю перетоков вблизи границы в некоторой ее окрестности поверхность раздела между водой и нефтью остается невозмущенной.

На внутренней границе  $r=r_c$  в верхней ее части  $0 \leq z \leq \beta H \leq H$  задается объемный расход  $Q$ , который распределяется по длине вскрытой части скважины пропорционально подвижности вытекающей жидкости. Нижняя часть скважины  $z > \beta H$  непроницаема.

Расчеты проводились при двух степенях вскрытия ( $\beta=0.3$  и  $0.5$ ) на сетках с различным числом узлов по  $r$  и  $z$ , с различным выбором пространственных и временных шагов для радиусов скважины  $r_c=20$  и  $100$  см,  $H=612$  см,  $\mu_1=1$  спз,  $\mu_2=10$  спз,  $f_1=\sigma^2$ ,  $f_2=(1-\sigma)^2$ . Эти же данные использовались и во всех дальнейших расчетах.

На фиг. 2 приводится зависимость доли воды в продукции скважины для  $\beta=0.5$ , на фиг. 3 — для  $\beta=0.3$ . Линиями даны результаты, полученные

с применением метода зональной линеаризации [1]. Точками нанесены значения, полученные конечно-разностным методом. Точки 1 соответствуют вариантам с  $r_c=20$  см, 2 —  $r_c=100$  см.

На фиг. 4 приведены линии равных насыщенностей (изосаты), полученные методом зональной линеаризации для  $\beta=0.3$  при  $\tau=0.475$ . На этой же фигуре нанесены точки, полученные интерполяцией значений в узлах сетки разностного решения задачи для несколько большего времени  $\tau=0.5$ . Эти точки соответствуют значениям насыщенности на изосатах (для точек и линии 1 —  $\sigma=0.46$ , для точек и линии 2 —  $\sigma=0.30$ ).

Отметим хорошее согласие результатов, полученных различными методами, а также слабую зависимость процесса обводнения от радиуса скважины. Разностная схема хорошо передает такую тонкую характеристику процесса, как положение фронтальной изосаты.

4. В случае  $\Delta\gamma \neq 0$  процесс образования водного конуса, его стационарное положение, величина предельного дебита существенно зависят от величины радиуса  $R$  внешней границы области, причем при неограниченном увеличении радиуса предельный дебит стремится к нулю. Поэтому при сравнении результатов, полученных при различных постановках задачи и разными методами, необходимо принимать во внимание величину радиуса  $R$ . Проведенный выше анализ размерностей позволяет сделать вывод, что в однородно-анизотропном пласте решение задачи, кроме указанных величин, зависит еще и от параметра  $R/\lambda H$ . Это означает, что в анизотропном пласте процесс конусообразования подобен процессу в изотропном пласте с равным значением данного параметра.

В настоящей работе для расчетов стационарных конусов и предельных безводных дебитов так же, как и в [5], используется динамический подход, причем учитывается двухфазность конуса, неполнота вытеснения нефти подошвенной водой. Стационарный конус в этом случае образуется в процессе подъема двухфазного конуса с одновременным «уплотнением» вследствие замедления его движения.

Динамика конусов обводнения, включая выход на стационарное положение, была рассчитана конечно-разностным методом. Теоретически стадия установления длится бесконечно долго. Практически за выход конуса на стационарное положение принимался момент времени, когда расход воды через внешнюю границу сокращался в 50 раз по сравнению с начальным.

Для определения предельного безводного дебита для каждой степени вскрытия пласта проводились расчеты с различными дебитами скважины. На фиг. 5 приведены значения безразмерной величины  $q$  в зависимости от степени вскрытия (кружочки). Величина  $q$  определяется через предельный безводный дебит  $Q$  выражением

$$q = \frac{Q \cdot \mu_2}{2\pi k_r H^2 \Delta\gamma}$$

Для сравнения приводятся значения  $q$  (сплошная линия), полученные в [4] для  $R/\lambda H=8.3$  по методике, основанной на приближенной теории стационарного конуса подошвенной воды Маскета — Чарного. Отметим близость предельных дебитов в районе  $\beta=0.5$ .

В основе теории стационарного конуса лежит предположение о том, что распределение потенциала в продуктивной части пласта совпадает с распределением потенциала в нефтенасыщенном пласте с непроницаемой подошвой  $z=H$ . По-видимому, для малых степеней вскрытия существенно изменение распределения потенциала по мере подъема конуса, пренебрежение этим фактом приводит к завышению предельного дебита  $Q$ . [3].

Некоторое отличие результатов для больших степеней вскрытия, вероятно, может быть объяснено отличием от нуля радиуса скважины (в данных расчетах принималось  $r_c=100$  см).

Применение конечно-разностного метода становится наиболее эффективным при расчете динамики конусообразования и предельных безводных дебитов в неоднородных, например слоистых, пластах.

Рассчитывался предельный дебит скважины с  $\beta=0.3$  в неоднородном пласте, продуктивная мощность которого состояла из трех слоев равной мощности с проницаемостями в 1.8, 1 и 0.2 *дарси*, считая от кровли, и проницаемостями водоносной части пласта  $k_r=1$  *дарси*,  $k_z=0.458$  *дарси*. При  $\rho_1=1$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_2=0,9$  г/см<sup>3</sup>,  $R=51$  м получилось, что предельный дебит  $Q_*=3.5$  см<sup>3</sup>/сек. Для однородно-анизотропного пласта с  $k_r=1$  *дарси* и  $k_z=0.458$  *дарси*, полученным осреднением проницаемостей слоистого пласта, оказалось, что  $Q_*=3$  см<sup>3</sup>/сек. По теории стационарного конуса в этом случае  $Q_*=3.44$  см<sup>3</sup>/сек.

Изменение порядка следования слоев в продуктивной части пласта не сказывается на осредненных характеристиках пласта, в то время как порядок может существенно повлиять на величину предельного дебита. Так, например, если в рассмотренном выше слоистом пласте поменять местами слой с проницаемостями в 1.8 и 0.2 *дарси*, получается, что  $Q_*=2.25$  см<sup>3</sup>/сек.

В заключение автор благодарит Р. М. Каца и М. И. Швидлера за внимание к работе и полезные советы.

Поступила 21 VII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов Ю. С., Данилов В. Л., Кац Р. М.* Пространственная двухфазная фильтрация к несовершенной скважине в нефтяном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
2. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М. — Л., Гостоптехиздат, 1949.
3. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
4. *Телков А. П., Стклянин Ю. И.* Образование конусов воды при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1965.
5. *Абрамов Ю. С.* О пространственном движении границы раздела двух несжимаемых жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
6. *Королев А. В., Шалимов Б. В., Швидлер М. И.* О «висячих» скачках насыщенности при фильтрации несмешивающихся жидкостей в неоднородных средах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
7. *Абрамов Ю. С., Кац Р. М.* О пространственном движении границы раздела двух несжимаемых жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.