

К ГИДРОДИНАМИКЕ ПОДЗЕМНЫХ ГАЗОХРАНИЛИЩ

И. Н. КОЧИНА, М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

Методом сращиваемых асимптотических разложений решена задача определения изменения во времени объема и давления газового пузыря в пологом пласте купольного типа, используемого в качестве подземного газохранилища при произвольном законе изменения дебита во времени. Для случая пласта постоянной мощности проводится сравнение с имеющимся точным решением; обнаруживается хорошее совпадение. Проведены расчеты динамики газового пузыря в фактической залежи. Рассматривается также случай пласта с крутым куполом и сильной анизотропией проницаемости.

1. Рассмотрим закачку газа с произвольно меняющимся во времени дебитом $Q(t)$ в водоносный пласт, имеющий купольную часть (фиг. 1, 1 — газ, 2 — вода). Пласт считается бесконечным и имеющим постоянную мощность h вдали от купола. Ищется давление в газовом пузыре $p(t)$, которое считается одинаковым во всем объеме в каждый момент времени, и объем $V(t)$, занимаемый газом.

В водяной зоне давление удовлетворяет уравнению фильтрации упругой жидкости в сжимаемой пористой среде, которое для рассматриваемого случая осесимметричного течения имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \dot{p}}{\partial t} = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right]$$

Здесь κ — коэффициент пьезопроводности пласта.

Это уравнение должно решаться при следующих условиях. На границе раздела газа и воды, которая считается горизонтальной, давления газа и воды одинаковы

$$(1.2) \quad p = p_g, \quad z = z_g(t)$$

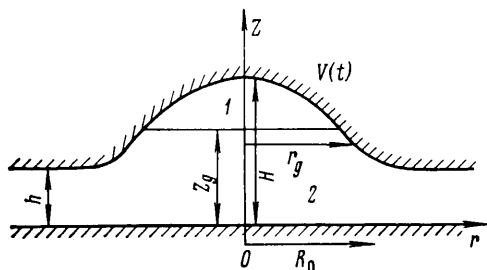
Скорость опускания границы раздела равна фактической средней скорости движения частиц воды через пористую среду на границе

$$(1.3) \quad m\sigma_* \frac{dz}{dt} = - \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g \right), \quad z = z_g$$

Здесь m — коэффициент пористости, σ_* — среднее значение газонасыщенности, учитывающее неполноту вытеснения воды газом, k — коэффициент проницаемости, ρ_0 и μ — плотность и вязкость воды.

В начальный момент времени

$$(1.4) \quad p + \rho_0 g z = p_c = \text{const}, \quad t = 0$$



Фиг. 1

В бесконечно удаленных точках в любой момент времени

$$(1.5) \quad p + \rho_0 g z = p_c = \text{const}, \quad r \rightarrow \infty$$

Кроме того, должно выполняться условие, выражающее равенство закачанной массы газа и запаса газа в пласте

$$(1.6) \quad p_0 \int_0^t Q(t) dt = V(t) p_g, \quad V(t) = m \sigma_* \pi \int_0^{r_g} r^2 z'(r) dr$$

где p_0 — нормальное атмосферное давление, $Q(t)$ — объемный расход газа, приведенный к нормальным условиям, $V(t)$ — объем порового пространства, занятый газом, $z = z(r)$ — уравнение поверхности купола.

Равенство (1.6) может быть записано в виде

$$(1.7) \quad \varepsilon \int_0^t \frac{Q(t)}{|Q|_{\max}} dt = \frac{p_g}{4 p_c \kappa h} \int_0^{r_g} r^2 z'(r) dr, \quad \varepsilon = \frac{|Q|_{\max} p_0}{4 \pi m \sigma_* \kappa h p_c}$$

Здесь $|Q|_{\max}$ — модуль максимального значения расхода газа.

В дальнейшем при решении задачи предполагается, что параметр ε принимает малые значения.

Условие $\varepsilon \ll 1$ выполняется во многих практически важных случаях, например при $Q_{\max} = 10^5 \text{ м}^3/\text{сут}$, $p_0 = 1 \text{ ат}$, $p_c = 100 \text{ ат}$, $m = 0.2$, $\sigma_* = 0.5$, $\kappa = 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}$, $h = 10 \text{ м}$ получаем $\varepsilon \sim 10^{-3}$. Принятие этого условия позволяет применить к решению задачи асимптотический метод [1, 2] и сильно упростить решение.

2. Приведем уравнение (1.1) и условия на границах к безразмерному виду некоторым специальным выбором безразмерных переменных. Обозначим

$$(2.1) \quad P = \frac{p}{p_c}, \quad \xi = \frac{z}{H}, \quad \rho = \frac{r}{R_0}, \quad \tau = \frac{\varepsilon \kappa t}{R_0^2}, \quad p^* = \frac{p_g}{p_c}$$

где H и R_0 — высота и радиус купола.

Соотношения (1.1) — (1.5) и (1.7) примут вид

$$(2.2) \quad \varepsilon \frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{R_0^2}{H^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$$

$$(2.3) \quad P = p^*, \quad \xi = \xi_g$$

$$(2.4) \quad \varepsilon \frac{d\xi}{d\tau} = -4\pi\beta \frac{R_0^2}{H^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\rho_0 g H}{p_c} \right), \quad \beta = \frac{k p_c}{4 \pi m \sigma_* \kappa \mu}$$

$$(2.5) \quad P + \frac{\rho_0 g H}{p_c} \xi = 1, \quad \tau = 0$$

$$(2.6) \quad P + \frac{\rho_0 g H}{p_c} \xi = 1, \quad \rho \rightarrow \infty$$

$$(2.7) \quad \int_0^{\tau} \frac{Q(\tau)}{|Q|_{\max}} d\tau = \frac{p_g H}{4 p_c h} \int_0^{\rho_g} \rho^2 \xi'(\rho) d\rho$$

Условие малости параметра ε облегчает решение задачи, но просто пренебречь членом с ε в уравнении (2.2) нельзя, так как решение «укороченного» таким образом уравнения (уравнения Лапласа) при больших значениях ρ ведет себя как $\ln \rho$ и не удовлетворяет условию на бесконечности

(2.6). Таким образом, возникает классическая ситуация для применения метода сингулярных возмущений, так как вблизи газового пузыря можно решать уравнение (2.2) при $\varepsilon=0$, а вдали от него надо искать другое решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию на бесконечности (2.6). Найдем оба решения и будем предполагать согласно общей схеме метода сингулярных возмущений, что существует некоторая область значений ρ , в которой они оба применимы. Чтобы найти внешнее разложение функции P , справедливое вблизи купола, положим в уравнении (2.2) $\varepsilon=0$. При этом приходим к уравнению Лапласа

$$(2.8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P_1}{\partial \rho} \right) + \frac{R_0^2}{H^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \zeta^2} = 0$$

которое должно быть решено при условиях (2.3) и (2.4). Будем считать, что оно справедливо для значений $0 < \rho < R_1/R_0$, где $R_1 > R_0$. Введем в рассмотрение среднее по мощности давление

$$(2.9) \quad P_1^* = \frac{H}{h} \int_0^{\zeta_0} P_1(\rho, \zeta, \tau) d\zeta, \quad \zeta_0 = \frac{h}{H}$$

Чтобы получить уравнение, которому удовлетворяет давление P_1^* , проинтегрируем (2.8) по ζ от подошвы до кровли на некотором удалении от купола, где кровля пласта уже пологая, но еще справедливо уравнение (2.8). Получим

$$(2.10) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P_1^*}{\partial \rho} \right) + \frac{R_0^2}{hH} \frac{\partial P_1}{\partial \zeta} \Big|_0^{\zeta_0} = 0$$

Так как вертикальная компонента скорости на кровле и подошве в пологой части пласта равна нулю, то

$$(2.11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P_1^*}{\partial \rho} \right) = 0$$

Решением последнего уравнения является логарифмическая функция

$$(2.12) \quad P_1^* = A^* + B^* \ln \rho$$

Напишем выражение для расхода воды $Q_0(t)$ через цилиндрическую поверхность радиуса R_1 , где справедливо решение (2.12)

$$(2.13) \quad Q_0(t) = 2\pi R_1 h \left(-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_1^*}{\partial r} \right)_{r=R_1} = -\frac{2\pi k h}{\mu} p_c B^*$$

Как следует из последнего равенства, в области, где выполняется (2.12), расход воды всюду одинаков, т. е. вода ведет себя как несжимаемая жидкость. Из (2.13) следует, что

$$(2.14) \quad B^* = -\frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_c}$$

Вблизи купола давление существенно зависит от формы купола, поэтому в дальнейшем будут отдельно рассмотрены два случая: купол с пологой кровлей и купол с крутой кровлей.

Чтобы получить внутреннее разложение P_2 , которое имеет место на больших расстояниях от купола, в частности при $R_1/R_0 \leq \rho < \infty$, надо решить

уравнение (2.2) при условиях (2.5) и (2.6). Введем новую безразмерную переменную $\rho_1 = r\sqrt{\epsilon}/R_0$, при этом уравнение (2.2) примет вид

$$(2.15) \quad \frac{\partial P_2}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\rho_1 \frac{\partial P_2}{\partial \rho_1} \right) + \frac{R_0^2}{\epsilon H^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi^2}$$

Оно выполняется, в частности, в области значений $R_1\sqrt{\epsilon}/R_0 \leq \rho_1 < \infty$.

Произведем над этим уравнением ту же операцию осреднения по мощности. Получим

$$(2.16) \quad \frac{\partial P_2^*}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\rho_1 \frac{\partial P_2^*}{\partial \rho_1} \right)$$

Условия (2.5) и (2.6) для среднего по мощности давления примут вид

$$(2.17) \quad P_2^* + \frac{\rho_0 g h}{2\rho_c} = 1 \quad \text{при} \quad \tau=0, \quad \rho \rightarrow \infty$$

Кроме того, на цилиндре радиуса R_1 дебит воды равен $Q_0(t)$.

Но при $\epsilon \rightarrow 0$ и фиксированном R_1 , $\rho_1 \rightarrow 0$, поэтому можно задать дебит на оси z , т. е. можно считать, что на оси z расположена фиктивная водяная скважина нулевого радиуса с дебитом $Q_0(t)$. Как известно [3], решение этой задачи дается выражением

$$(2.18) \quad P_2^* + \frac{\rho_0 g h}{2\rho_c} = 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^\tau \frac{q(\tau_1) \exp[-\rho_1^2/4(\tau-\tau_1)]}{\tau-\tau_1} d\tau_1$$

$$q(\tau) = Q_0(\tau) \mu / kh\rho_c$$

Устремляя ϵ , а следовательно, и ρ_1 к нулю, найдем первое приближение внутреннего разложения в виде

$$(2.19) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_2^* = 1 + \frac{q(\tau)}{4\pi} \ln \frac{2.25\tau}{\rho_1^2} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\tau \frac{q(\tau) - q(\tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau_1 - \frac{\rho_0 g h}{2\rho_c}$$

Проводя сращивание внешнего и внутреннего разложений, т. е. приравнивая

$$(2.20) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_1^* = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} P_2^*$$

поскольку по предположению оба разложения применимы при $\rho_1 = R_1/R_0$ ($\rho_1 = R_1\sqrt{\epsilon}/R_0$), получим условие для определения давления в газовом пузыре p_g в виде

$$(2.21) \quad A^* - \frac{q(\tau)}{2\pi} \ln \rho = 1 + \frac{q(\tau)}{4\pi} \ln \frac{2.25\tau}{\rho_1^2} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\tau \frac{q(\tau) - q(\tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau_1 - \frac{\rho_0 g h}{2\rho_c}$$

Здесь использованы соотношения (2.14) и выражение для $q(\tau)$ из (2.18).

3. Рассмотрим закачку газа в купольную часть пласта, считая кровлю купола достаточно пологой. Найдем внешнее разложение P_1 , справедливое вблизи купола.

Условие (2.4) при $\epsilon \rightarrow 0$ дает

$$(3.1) \quad \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + \frac{\rho_0 g H}{\rho_c} = 0$$

Соотношение (3.1) означает малость скорости движения воды по вертикали на границе раздела, а следовательно, и во всей области, т. е. распределение давления по закону гидростатики

$$(3.2) \quad P_1 = A_1 - \frac{\rho_0 g H}{\rho_c} \zeta$$

Но так как пласт предполагается пологим всюду до границы раздела, то во всей области выполнения уравнения (2.8), т. е. для $\rho_g \leq \rho \leq R_1/R_0$, справедливо соотношение (2.12) для среднего давления. Изменение же давления по вертикали дается равенством (3.2)

$$(3.3) \quad P_1 = A - \frac{\rho_0 g H}{\rho_c} \zeta + B \ln \rho$$

Используя формулу (2.14) и выражение для $q(\tau)$ из (2.18) и находя коэффициент A из условия (2.3), получим

$$(3.4) \quad P_1 = p^* + \frac{\rho_0 g H}{\rho_c} (\zeta_g - \zeta) - \frac{q(\tau)}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_g}$$

Перейдем снова к среднему по мощности давлению

$$(3.5) \quad P_1^* = p^* + \frac{\rho_0 g H}{\rho_c} \zeta_g - \frac{\rho_0 g h}{2\rho_c} - \frac{q(\tau)}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_g}$$

Сравняя внешнее (3.5) и внутреннее (2.19) разложения по условию (2.20) и переходя к размерным переменным p, r, z, t , получим

$$(3.6) \quad p_g = p_c + \frac{Q_0(t)\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2.25\kappa t}{r_g^2} - \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^t \frac{Q_0(t) - Q_0(t_1)}{t - t_1} dt_1 - \rho_0 g z_g$$

Кроме давления газа p_g в этом уравнении неизвестны дебит воды $Q_0(t)$ и координаты границы раздела воды и газа r_g и z_g . Последние связаны уравнением поверхности купола

$$(3.7) \quad z = z(r)$$

Кроме того, имеем уравнение (1.6) и условие, что объем, занимаемый газом, равен объему воды, ушедшей в пласт

$$(3.8) \quad V(t) - V(0) = \int_0^t Q_0(t) dt$$

где $V(0)$ — объем, занятый газом в начальный момент.

Введем масштаб времени T_0 , характерный для динамики закачки газа (например, если функция $Q(t)$ периодическая, то за T_0 принимается ее период), и соответствующее безразмерное время $x = t/T_0$. Затем, следуя [4], обозначим

$$f(x) = \frac{\rho_0 \int_0^x Q(t) dt}{4\pi m \sigma^* \kappa h T_0 \rho_c}, \quad \alpha(x) = \frac{V(t)}{4\pi m \sigma^* \kappa h T_0}$$

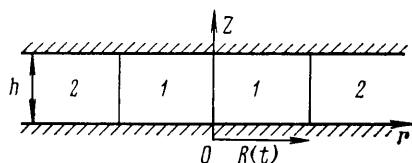
Тогда система уравнений (3.6), (1.6) и (3.8) в безразмерных переменных ρ, ζ, x, p^* примет вид

$$(3.9) \quad p^* = 1 + \frac{q(x)}{4\pi} \ln \frac{2.25\kappa T_0 x}{R_0^2 \rho_g^2} - \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{q(x) - q(x_1)}{x - x_1} dx_1 - \frac{\rho_0 g H}{\rho_c} \zeta_g$$

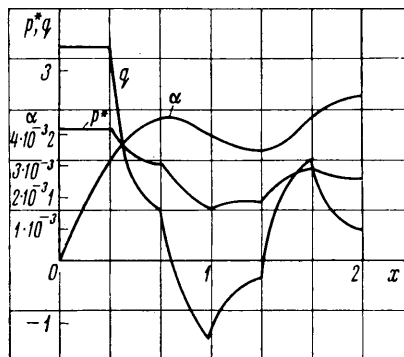
$$(3.10) \quad f(x) = \alpha(x) p^*(x)$$

$$(3.11) \quad \alpha(x) - \alpha(0) = \beta \int_0^x q(x_1) dx_1$$

Система уравнений (3.9) — (3.11) легко решается. Аппроксимируя $q(x)$ в виде кусочно-линейной функции, можно свести систему к алгебраической и просчитать ее на ЭВМ. Для сравнения предложенного приближенного решения с имеющимся точным [4] был рассмотрен пласт постоянной мощности (фиг. 2, 1 — газ, 2 — вода). Для такого пласта первые приближения внешнего и внутреннего разложений имеют вид (3.5) и (2.19) без



Фиг. 2



Фиг. 3

членов, зависящих от мощности пласта, а $\rho_g = R(x)/R_0$, где $R(x)$ — радиус газовой зоны. Уравнение для давления газа записывается в виде

$$(3.12) \quad p^* = 1 + \frac{q(x)}{4\pi} \ln \frac{x}{1.78\alpha(x)} - \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{q(x) - q(x_1)}{x - x_1} dx_1$$

$$\alpha(x) = R^2(x)/4\kappa T_0$$

Уравнения (3.10) и (3.11) сохраняют прежний вид.

Графики, построенные для функций $p^*(x)$, $\alpha(x)$ и $q(x)$ по точной теории [4] и по приближенным соотношениям (3.10), (3.11) и (3.12), практически совпали (фиг. 3).

Было проведено сопоставление фактического изменения давления на Шелковском газохранилище и давления, подсчитанного по уравнению (3.9) при заданных дебитах газа $Q(t)$. Были взяты следующие значения параметров:

$H=120$ м, $h=100$ м, $R_0=2.2$ км, $p_0=1$ ат, $p_c=100$ ат, $m=0.2$, $\sigma^*=0.5$, $\kappa=3.7 \cdot 10^4$ см²/сек, $T_0=1$ год, $k=1$ дарси, $\mu=1$ спз, $\rho_0=1$ г/см³. Уравнение купола бра-лось в виде

$$\rho^2 = 6(1 - \xi)$$

Результаты сопоставления приведены на фиг. 4, где пунктиром показана теоретическая, а сплошной линией — фактическая кривая изменения давления. Как видно, совпадение вполне удовлетворительное, особенно если иметь в виду невысокую точность определения параметров пласта.

4. Рассмотрим важный для практики случай анизотропного пласта, в котором проницаемость по вертикали k_z много меньше проницаемости по горизонтали k_r ($k_z \ll k_r$). Будем считать в этом случае, что пласт имеет крутой купол. Условие малости ϵ сохраняем. Основные соотношения п. 1 и 2 при этом сохраняются, но в знаменателе выражения (1.7) следует взять коэффициент пьезопроводности по горизонтальной проницаемости

$\kappa_r = k_r / \mu \beta^*$. При этом во втором члене правой части уравнения (2.2) и в правой части условия (2.4) появится коэффициент k_z / k_r .

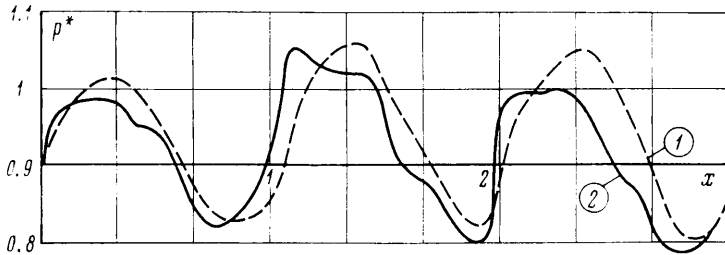
Применим метод, изложенный в п. 2, для нахождения первого приближения внешнего разложения: положим $\varepsilon = 0$ и будем решать уравнение

$$(4.1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P_1}{\partial \rho} \right) + \frac{k_z R_0^2}{k_r H^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \zeta^2} = 0$$

Так как $k_z / k_r \ll 1$, то можно отбросить второе слагаемое. Тогда

$$(4.2) \quad \rho \frac{\partial P_1}{\partial \rho} = F(\zeta)$$

На поверхности крутого купола можно считать, что горизонтальная составляющая скорости воды равна нулю, поэтому $\partial P_1 / \partial \rho = 0$, а так как на



Фиг. 4

этой поверхности $\partial P_1 / \partial \rho = 0$, то $F(\zeta) = 0$ и $\partial P_1 / \partial \rho = 0$ во всем куполе. Следовательно, величина P_1 в куполе не зависит от ρ и на любой горизонтальной плоскости внутри купола выполняется равенство вертикальной скорости фильтрации расходу воды, деленному на площадь сечения

$$(4.3) \quad -\frac{k_z}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} + \rho_0 g \right) = \frac{Q_0(t)}{\pi r^2}$$

или в безразмерном виде

$$(4.4) \quad -\frac{R_0^2 k_z}{H h k_r} \left(\frac{dP_1}{d\zeta} + \frac{\rho_0 g H}{p_c} \right) = \frac{q(\tau)}{\pi \rho^2}$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что ρ связано с ζ уравнением купола, получим для точек внутри купола

$$(4.5) \quad P_1 = p^* + \frac{\rho_0 g H}{p_c} (\zeta_g - \zeta) + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(\tau) \int_{\zeta}^{\zeta_g} \frac{d\zeta}{\rho^2(\zeta)}$$

Но так как купол крутой, для значений $\zeta \leq \zeta_g$ имеем $\rho \approx 1$. Поэтому

$$\int_{\zeta}^{\zeta_g} \frac{d\zeta}{\rho^2(\zeta)} \approx \zeta_g - \zeta$$

и внутри купола

$$(4.6) \quad P_1 = p^* - \left[\frac{\rho_0 g H}{p_c} + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(\tau) \right] (\zeta_g - \zeta)$$

Осредним давление внутри купола по мощности пласта, т. е. найдем

$$(4.7) \quad P_1^* = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} P_1 d\xi = p^* + \left[\frac{\rho_0 g H}{p_c} + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(\tau) \right] \left(\xi_g - \frac{\xi_0}{2} \right)$$

Вне купола среднее по мощности давление снова определяется по формуле (2.12). Приравнивая правые части равенств (2.12) и (4.7) на границе купола, т. е. при $\rho=1$, найдем выражение для коэффициента A^* и среднего по мощности давления, представляющего собой первое приближение внешнего разложения, справедливое вне купола, для значений $\rho \leq R_1/R_0$

$$(4.8) \quad A^* = p^* + \left[\frac{\rho_0 g H}{p_c} + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(\tau) \right] \left(\xi_g - \frac{\xi_0}{2} \right)$$

$$(4.9) \quad P_1^* = p^* + \left[\frac{\rho_0 g H}{p_c} + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(\tau) \right] \left(\xi_g - \frac{\xi_0}{2} \right) - \frac{q(\tau)}{2\pi} \ln \rho$$

Первое приближение внутреннего разложения P_2^* , среднее по мощности, выражается по-прежнему формулой (2.19), так как на больших расстояниях от газового пузыря детали купольной структуры несущественны. Оно имеет место, в частности, для $R_1/R_0 \leq \rho < \infty$.

Срачивая решения (4.9) и (2.19), найдем выражение для давления газа.

Запишем его в безразмерном виде через безразмерное время $x=t/T_0$

$$(4.10) \quad p^* = 1 + \frac{q(x)}{4\pi} \ln \frac{2.25 \kappa_r T_0 x}{R_0^2} - \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{q(x) - q(x_1)}{x - x_1} dx_1 - \\ - \left[\frac{\rho_0 g H}{p_c} + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(x) \right] \xi_g + \frac{H h k_r}{\pi R_0^2 k_z} q(x) \frac{\xi_0}{2}$$

Система (4.10), (3.10) и (3.11) позволяет решить задачу.

Авторы благодарят В. Д. Епишина за проделанные им расчеты.

Поступила 13 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Дж. Д. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
3. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.