

## К РАСЧЕТУ СКОРОСТИ КОАЛЕСЦЕНЦИИ ЭМУЛЬСИИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В. М. ЕНТОВ, В. А. КАМИНСКИЙ, Е. Я. ЛАПИГА

(Москва)

Центральным моментом теории, описывающей слияние (коалесценцию) капель эмульсии, является определение времени сближения капель или числа капель, сталкивающихся с данной в единицу времени. На стадии, непосредственно предшествующей слиянию капель, оказываются существенными силы гидродинамического торможения сближающихся капель. Роль этих сил была проанализирована ранее для случая захвата мелких капель крупными из набегающего потока при наличии внешнего электрического поля [1] и для задачи о «броуновском» сближении капель с учетом влияния двойного электрического слоя и поверхностных сил взаимодействия [2-4].

В данной работе рассматривается сближение капель при турбулентной диффузии в электрическом поле. Наиболее интересным оказывается резкое замедление сближения из-за гидродинамического взаимодействия капель — значительно более резкое, нежели в случае молекулярной диффузии [2]. В результате становится понятным резкое ускорение сближения и коалесценции капель при воздействии электрического поля на эмульсию в турбулентном потоке.

**1. Эффективный коэффициент диффузии для частицы, находящейся под действием случайной силы.** Коэффициент диффузии  $D$  для частицы, движущейся вдоль оси  $x$  под действием случайной силы  $F$  и испытывающей сопротивление, может быть получен осреднением уравнения Ланжевена [5]

$$(1.1) \quad -H\dot{x} + F = 0$$

где  $H$  — коэффициент сопротивления, и оказывается равным

$$(1.2) \quad D = BH^{-2}, \quad B = \langle f(t)^2 \rangle / 2t, \quad f(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$$

При наличии термодинамического равновесия имеем классические соотношения

$$(1.3) \quad B = HkT, \quad D = kTH^{-1}$$

В случае, если коэффициент сопротивления  $H$  меняется на расстояниях, больших по сравнению с перемещением частицы за одну пульсацию силы, в соотношении (1.3) можно заменить  $H$  на  $H(x)$ . Наличие регулярных (неслучайных) сил, масштаб изменения которых велик по сравнению с масштабом пульсаций, не меняет вида коэффициента диффузии.

Уравнение (1.1) описывает в безынерционном приближении движение частицы в вязкой жидкости под действием случайной силы независимо от того, справедливо или нет первое соотношение (1.3), следующее из условия статистического равновесия (например, если сила  $F$  не связана с тепловыми флуктуациями). Если это соотношение не выполняется, нарушается обратная пропорциональность коэффициента диффузии сопротивле-

нию  $H$ . Так, если допустить, что случайная сила не зависит от  $H$  (например, имеется внешнее заданное случайное поле), то коэффициент диффузии окажется обратно пропорциональным  $H^2$ . Если же случайная сила в каждый момент времени пропорциональна  $H$ , то коэффициент диффузии окажется не зависящим от сопротивления.

Последняя ситуация реализуется при диффузии свободной частицы в поле турбулентных пульсаций в масштабе, меньшем внутреннего масштаба турбулентности [6]. Рассмотрим этот случай более подробно. Внутренний масштаб турбулентности выделяется тем, что ему соответствует «пульсационное» число Рейнольдса, равное единице, т. е. все относительные перемещения внутри выделенного элемента жидкости определяются стоковскими уравнениями безынерционного движения. В этом приближении скорость взвешенных частиц  $\mathbf{r}$  совпадает с локальной скоростью жидкости  $\mathbf{v}$ , представляющей собой случайную функцию, определяемую параметрами внешнего турбулентного потока, т. е.  $\mathbf{r} = \mathbf{v}$ .

Рассмотрим теперь приближение сферической частицы радиуса  $a$  к стенке, обтекаемой турбулентным потоком. Если частица достаточно мала, то основная стадия сближения частицы со стенкой приходится на движение в вязком подслое, что позволяет записать уравнение движения в безынерционном приближении (ограничимся рассмотрением движения вдоль оси  $x$ , перпендикулярной стенке)

$$(1.4) \quad F_g + F_r = 0, \quad F_g = H_g v, \quad F_r = -H_r u$$

Здесь  $F_g$  — сила, которая действовала бы на неподвижную частицу со стороны обтекающего ее потока,  $F_r$  — сила сопротивления собственному движению частицы;  $u$  — скорость частицы.

На больших расстояниях от стенки частица движется вместе с жидкостью

$$(1.5) \quad H_g = H_r = H_0 = 6\pi\mu a, \quad v = u$$

По мере приближения к стенке изменяются оба коэффициента  $H_g$  и  $H_r$ . Однако коэффициент  $H_g$  меняется сравнительно мало (это следует, например, из [7]), тогда как коэффициент  $H_r$  резко возрастает и обращается в бесконечность в момент касания частицы и стенки.

В соответствии с (1.4) случайное движение частицы определяется соотношением

$$(1.6) \quad u = \dot{x} = H_g v / H_r$$

Очевидно, в малом (пока можно пренебречь зависимостью  $H_g$  и  $H_r$  от координаты  $x$ ) уравнение (1.6) описывает движение, подобное движению нестесненной частицы (соотношения (1.5)) с коэффициентом подобия  $H_g/H_r$ . Поэтому из (1.5) следует, что эффективный коэффициент диффузии частицы в поле турбулентных пульсаций вблизи стенки равен

$$(1.7) \quad D(x) = D_0(x) (H_g/H_r)^2, \quad D_0 = \left\langle \left( \int_0^t v(\tau) d\tau \right)^2 \right\rangle / 2t$$

Здесь  $D_0$  — коэффициент диффузии при нестесненном движении частицы.

Таким образом, в случае турбулентной диффузии коэффициент диффузии обратно пропорционален квадрату коэффициента сопротивления движению частицы (а не первой его степени, как в случае молекулярной диффузии — формула (1.3)).

В соотношении (1.7) коэффициент диффузии нестесненных частиц принят явно зависящим от расстояния до стенки, что отражает уменьшение коэффициента турбулентной диффузии при приближении к стенке из-за затухания пульсаций в вязком подслое.

В соответствии с имеющимися данными

$$(1.8) \quad D_0(x) = \nu(x/\delta)^\alpha$$

Здесь  $\delta$  — толщина вязкого подслоя,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. Формула (1.8) учитывает равенство коэффициентов турбулентного переноса примеси и импульса. В отношении величины показателя  $\alpha$  до сих пор нет полной ясности; обычно принимается  $\alpha = 3 \div 4$  [6, 8, 9]. В дальнейшем не учитывается изменение коэффициента  $H_g$  с расстоянием от стенки, положено  $H_g = H_0$ , а для коэффициента  $H_r$  принята аппроксимация

$$(1.9) \quad H_r = H_0 [1 + a(x-a)^{-1}] = H_0 x(x-a)^{-1}$$

правильно отражающая асимптотику  $H_r$  при  $x \rightarrow a$  и  $x \rightarrow \infty$ .

Из (1.7) — (1.9) найдем

$$(1.10) \quad D(x) = \nu(x/\delta)^\alpha [(x-a)/x]^2$$

**2. Турбулентная диффузия к стенке под влиянием силового поля.** Рассмотрим стационарную турбулентную диффузию сферических частиц к стенке, действующей на частицы с силой  $F$ . Если частицы поглощаются стенкой при контакте, то имеем

$$(2.1) \quad \frac{d}{dx} \left( D(x) \frac{dc}{dx} - \frac{cF}{H} \right) = 0, \quad c(a) = 0$$

$$(2.2) \quad Q = \left| -D(x) \frac{dc}{dx} + \frac{cF}{H} \right| = \text{const}$$

где  $Q$  — поток частиц на стенку.

Полагая  $F/(HD) = O(x^{-1-\epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , можно определить «концентрацию вдали от стенки»  $c_0 = c(\infty)$ . Фактически под  $c_0$  следует понимать концентрацию на границе вязкого подслоя. Искомое стационарное решение, удовлетворяющее условиям  $c(a) = 0$ ,  $c(\infty) = c_0$  существует, если сходится интеграл

$$(2.3) \quad R = \int_a^\infty D^{-1}(x) \exp[\varphi(x)] dx, \quad \varphi(x) = \int_x^\infty \frac{F}{HD} d\xi$$

$$(2.4) \quad Q = c_0/R$$

Подсчитаем вначале поток частиц  $Q_0$ , обусловленный турбулентной диффузией в отсутствие силового поля ( $F \equiv 0$ ) и торможения частиц стенкой ( $D \equiv D_0(x)$ ). Используя (1.8), (2.3) и (2.4), получим

$$(2.5) \quad Q_0 = c_0 \delta^{-\alpha \nu} \left[ \int_a^\infty \xi^{-\alpha} d\xi \right]^{-1} = c_0 \delta^{-\alpha} (\alpha - 1) \nu \alpha^{-1}$$

Если, не вводя силового поля, учесть торможение частицы стенкой, то интеграл в (2.3) окажется расходящимся, т. е. искомое стационарное решение не существует. Иными словами, как и при молекулярной диффу-

зии, осаждение частиц на стенке возможно лишь при наличии определенных сил притяжения.

В случае, когда окончательное сближение частиц со стенкой обусловлено короткодействующими силами притяжения, естественно ввести понятие о «зоне захвата» частиц толщиной  $\Delta$ , положив формально  $F=0$ ,  $x-a>\Delta$ ,  $|F|=\infty$ ,  $x-a\leq\Delta$ . При этом для потока частиц в условиях стесненной турбулентной диффузии можно получить

$$(2.6) \quad Q=c_0\nu\delta^{-\alpha}\left[\int_{a+\Delta}^{\infty}(\xi-a)^{-2}\xi^{2-\alpha}d\xi\right]^{-1}$$

$$Q=c_0\nu\delta^{-3}a^2[a/\Delta+\ln(1+a/\Delta)]^{-1} \quad (\alpha=3)$$

$$Q=c_0\nu\delta^{-4}a^3[a/\Delta+a/(a+\Delta)-2\ln(1+a/\Delta)]^{-1} \quad (\alpha=4)$$

При  $\Delta\rightarrow 0$  диффузионный поток убывает пропорционально отношению  $\Delta/a$ ; в случае броуновской диффузии поток был бы пропорционален  $1/\ln(\Delta/a)$ . Таким образом, для турбулентной диффузии характерна резкая зависимость потока от толщины зоны захвата. Одновременно это показывает, что само понятие «радиус захвата» (толщина зоны захвата) может оказаться слишком грубой характеристикой молекулярных сил притяжения между стенкой и каплей. Действительно, примем для короткодействующих сил

$$(2.7) \quad F=-aA/6(x-a)^2, \quad A=\text{const}$$

С учетом выражений (1.9), (1.10), (2.7) уравнение (2.2) принимает вид

$$(2.8) \quad y^3\frac{dc}{dy}+\frac{cA\delta^\alpha a}{\nu H_0(y+a)^{\alpha-1}}=\frac{Q\delta^\alpha y}{\nu(y+a)^{\alpha-2}}, \quad y=x-a$$

Из приведенных выше решений следует, что при малых  $A$  основное диффузионное сопротивление сосредоточено в узком пристеночном слое. Поэтому в (2.8) можно положить  $y\ll a$ . При этом имеем

$$(2.9) \quad \Lambda\eta^3\frac{dc}{d\eta}+c=P\eta, \quad \Lambda=A\delta^\alpha/(H_0\nu a^{\alpha-2})$$

$$P=Q\delta^\alpha/\nu a^{\alpha-2}, \quad \eta=y/\Lambda$$

Искомое решение уравнения (2.9) имеет вид

$$(2.10) \quad c=\left[c_0-\frac{P}{2\Lambda}\int_0^{\eta^2}\exp\left(-\frac{u}{2\Lambda}\right)\frac{du}{u^{1/2}}\right]\exp\left(\frac{1}{2\Lambda\eta^2}\right)$$

$$(2.11) \quad P=2c_0\Lambda\left[\int_0^\infty\exp\left(-\frac{u}{2\Lambda}\right)\frac{du}{u^{1/2}}\right]^{-1}=c_0(2\Lambda/\pi)^{1/2}$$

$$(2.12) \quad Q=\nu a^{\alpha-2}\delta^{-\alpha}P=c_0[2\nu A/(\pi H_0 a^2)]^{1/2}(a/\delta)^{\alpha/2}$$

Сопоставим это выражение с выражением для потока в модели зоны захвата (2.6); полагая  $\Delta\ll a$ , имеем

$$Q=c_0\nu\Delta a^{\alpha-2}\delta^{-\alpha}=c_0[2\nu A/(\pi H_0 a^2)]^{1/2}(a/\delta)^{\alpha/2}$$

откуда с учетом (1.5)

$$(2.13) \quad \Delta=(\pi\nu)^{-1}(Aa/3\rho)^{1/2}(\delta/a)^{\alpha/2}$$

Таким образом, эффективный радиус захвата оказывается сильно зависящим от «внешних» параметров задачи, в частности от радиуса частиц и толщины вязкого подслоя, и не может служить характеристикой взаимодействия стенки с частицей. Чтобы оценить характерную величину радиуса захвата, положим  $A=10^{-13}$  эрг,  $\nu=0.1$  см<sup>2</sup>/сек,  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>,  $a=10^{-3}$  см,  $\delta/a=30$ ,  $\alpha=3$ . Имеем при этом  $\Delta \approx 3 \cdot 10^{-6}$  см.

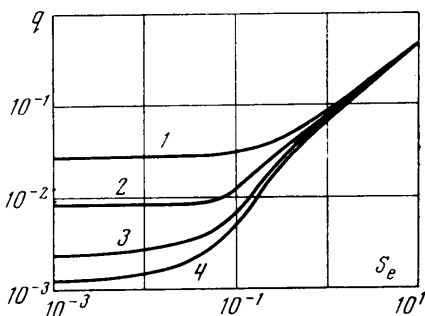
Рассмотрим, наконец, осаждение сферических частиц на стенке под совместным действием молекулярных сил и электростатического притяжения. Стенку и частицы будем считать идеально проводящими, а окружающую их дисперсионную среду — диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Будем полагать, что в жидкости вблизи стенки существует (если не учитывать возмущающего влияния частиц) однородное электрическое поле напряженности  $E$ . Можно рассчитать силу притяжения частицы к стенке  $F_e$ , обусловленную поляризацией (см. ниже); сила, обусловленная молекулярным взаимодействием, обозначается через  $F_m$ .

Для потока частиц имеем выражение (2.4), где

$$(2.14) \quad R = \int_a^{\infty} D^{-1}(x) \exp[\varphi(x)] dx, \quad \varphi(x) = \int_x^{\infty} (F_e + F_m) H^{-1}(x) D^{-1}(x) dx$$

Результаты численного расчета по формулам (2.4) и (2.14) представлены на фиг. 1 (кривые 1–4 отвечают  $S_m=10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  соответственно). В интеграле для  $R$  нижний предел брался равным  $a(1+\beta)$ . Предварительные расчеты показали, что при  $\beta \leq 10^{-3}$  в основной части исследованного диапазона параметров задачи величина  $\beta$  не оказывает влияния на значение потока. Приводимые результаты соответствуют  $\beta=10^{-3}$ .

На фиг. 1 безразмерный поток  $q$  представлен в функции от безразмерной интенсивности электрического поля  $S_e$  и безразмерной интенсивности молекулярного притяжения  $S_m$  при  $\alpha=3$ ; результаты расчета при  $\alpha=3.5$  и 4 отличаются незначительно



Фиг. 1

$$q = Q \delta^\alpha (\nu a^{\alpha-1} c_0)^{-1}$$

$$S_e = \epsilon E^2 \delta^\alpha (6\pi\rho\nu^2 a^{\alpha-2})^{-1}$$

$$S_m = A \delta^\alpha (36\pi\rho\nu^2 a^{\alpha+1})^{-1}$$

Из фиг. 1 легко видеть, что существует два асимптотических режима осаждения капель на стенке, в одном из которых пренебрежимо мало влияние электрического поля, в другом — это влияние оказывается преобладающим. Несмотря на значительное изменение параметра молекулярного взаимодействия  $S_m$ , область перехода между двумя указанными режимами заключена в пределах  $2 \cdot 10^{-2} < S_e < 5 \cdot 10^{-1}$ .

Выше уже говорилось, что подавление турбулентной диффузии гидродинамическим торможением в пристеночном слое приводит к резкой зависимости потока от молекулярных сил. Это отчетливо видно и из данных фиг. 1 для малых интенсивностей электрического поля. Нетрудно понять, что изменение характера молекулярного поверхностного взаимодействия при попадании на поверхность капель поверхностно-активных веществ, стабилизирующих эмульсии, может резко уменьшить поток частиц. С другой стороны, уже сравнительно небольшое электрическое поле способно подавлять влияние молекулярных сил и гидродинамическое торможение

в пристеночном слое. Так, при  $\delta=10^{-1}$  см,  $a=3 \cdot 10^{-3}$  см значение  $S_e \approx 1$  достигается при полях  $\sim 170$  в/см.

Заметим, что все расчеты были проведены в безынерционном приближении, хотя действующие силы сингулярны при приближении частиц к стенке. Однако прямая оценка показывает, что инерционные эффекты пренебрежимо малы вплоть до расстояний  $\sim 10$  Å.

**3. Сближение капель эмульсии под действием турбулентной диффузии и силового поля.** Пытаемся перенести развитые выше представления на случай сближения пары капель эмульсии в турбулентном потоке при наличии электрического поля. Рассматривая относительное движение капель, будем считать одну из них закрепленной. Это упрощающее допущение, обычное в теории коагуляции, оправдывается здесь тем, что по сути дела рассматриваются лишь оценки диффузионных потоков по порядку величины. Основная стадия сближения достаточно малых капель приходится на расстояния, меньшие внутреннего масштаба турбулентности, так что диффузия частиц происходит под действием «наведенных» внешним полем пульсаций. Пусть расстояние между частицами  $r$ , внутренний масштаб турбулентности  $\lambda$ . Для коэффициента относительной диффузии по аналогии с (1.7) получаем

$$(3.1) \quad D(r) = D_0(r) (H_0/H_r)^2 \approx D_0(r) [1 + k^2(k+1)^{-2}x^{-1}]^{-2}, \quad k = R_1/R_2 \geq 1$$

$$(3.2) \quad D_0(r) \approx \nu R_2^2 \lambda^{-2} (1 + k^{-1} + x)^2$$

Здесь  $R_1$  — радиус «закрепленной» капли,  $R_2$  — радиус движущейся капли,  $x = [r - (R_1 + R_2)]/R_2$ ,  $D_0(r)$  — коэффициент диффузии без учета гидродинамического взаимодействия частиц. Аппроксимация коэффициента сопротивления движению капель выбрана, как и выше, с учетом асимптотики при  $x \rightarrow 0$ . С учетом затухания турбулентных пульсаций вблизи большей капли ( $R_1$ ) коэффициент диффузии  $D_0(r)$  выбран из условия, что размер пульсаций, определяющих относительное перемещение частиц, равен  $r$  для одинаковых частиц ( $k=1$ ) и равен  $r - R_1$  при  $k \gg 1$ .

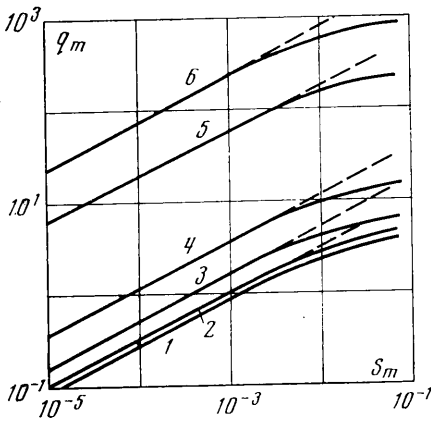
Если имеется радиальное (с центром в центре закрепленной частицы) силовое поле  $F$ , то для потока частиц имеем

$$(3.3) \quad Q = 4\pi c_0 \left\{ \int_{R_1+R_2}^{\infty} \exp \left[ \int_r^{\infty} \frac{F(r')}{H(r')D(r')} dr' \right] \frac{dr}{r^2 D(r)} \right\}^{-1}$$

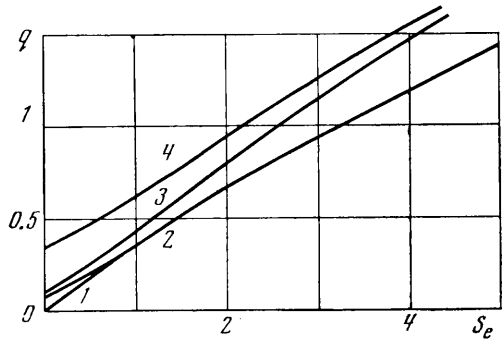
Силы молекулярного взаимодействия  $F_m$  учитываются лишь на малых расстояниях и для них использовано выражение

$$(3.4) \quad F_m(x) = -kA [6(k+1)R_2 x^2]^{-1}$$

Сила электростатического притяжения капель  $F_e$ , обусловленная их поляризацией во внешнем электрическом поле, зависит не только от расстояния между каплями, но и от их ориентации по отношению к полю (см. ниже). Учесть это обстоятельство сложно не только в связи с возникающими математическими трудностями, но и в связи с возможностью вращения пары капель относительно поля в условиях турбулентного потока. Поэтому при расчете вначале определялся поток в единице телесного угла в предположении, что сила является чисто радиальной, а затем суммарный поток  $Q$  определялся интегрированием по поверхности с учетом зависимости электрической силы от угла ориентации капель по отношению к полю.



Фиг. 2



Фиг. 3

В отсутствие электрического поля из (3.2) – (3.4) получим

$$(3.5) \quad Q = 4\pi c_0 \nu R_2^3 \lambda^{-2} \varphi_m^{-1}$$

$$(3.6) \quad \varphi_m = \int_0^\infty \frac{k^2}{(k+1)^4 x^2 (k+1+x)^2} \left[ \frac{x(k+1)^2 + k^2}{k+1+kx} \right]^2 \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2 S_m}{(k+1)^2} \int_x^\infty \frac{\xi (k+1)^2 + k^2}{(k+1+\xi k)^2} \frac{d\xi}{\xi^3} \right\} dx, \quad S_m = \frac{A\lambda^2}{36\pi\nu^2\rho R_2^3}$$

Параметр молекулярного взаимодействия  $S_m$  обычно весьма мал. Так, при  $A=10^{-13}$  эрг,  $\lambda=0.1$  см,  $\nu=0.1$  ст,  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>,  $S_m \approx 10^{-15}/R_2^3$  ( $R_2$  в см) и при  $R_2=10^{-3}$  см  $S_m \approx 10^{-6}$ . При малых  $S_m$  для  $\varphi_m$  можно получить асимптотическую формулу

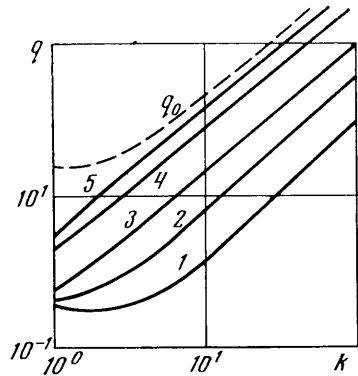
$$(3.7) \quad \varphi_m \approx k^4 (k+1)^{-6} [\pi(k+1)/2kS_m]^{1/2}$$

Заметим, что если бы не учитывалось гидродинамическое торможение, молекулярное взаимодействие капель можно было бы не учитывать. При этом, полагая в (3.3)  $F=0$ ,  $D=0$ , получим

$$(3.8) \quad \varphi_0 = k^2 (k^2 - 1)^{-2} - \\ - 2k^3 (k^2 - 1)^{-3} \ln k$$

Отношение  $\varphi_0/\varphi_m$  характеризует влияние гидродинамического торможения, когда окончательное слияние капель обусловлено молекулярными силами. При обычных значениях параметра  $S_m$  это отношение весьма мало ( $10^{-2} \div 10^{-3}$ ). Результаты расчета зависимости  $q_m = \varphi_m^{-1}$  по формуле (3.6) (сплошные линии) и по асимптотической формуле (3.7) (пунктир) показаны на фиг. 2 (кривые 1–6 отвечают значениям  $k=2, 1, 5, 10, 50, 100$  соответственно).

Диффузионные потоки с учетом электростатического притяжения рассчитаны по описанной выше схеме в широком диапазоне изменения пара-



Фиг. 4

метров  $k$ ,  $S_m$  и  $S_e = \epsilon E^2 \lambda^2 / (6\pi r v^2)$ . Некоторые результаты приведены на фиг. 3, 4. (На фиг. 3 для кривых 1 и 2  $k=2$ ,  $S_m=10^{-5}$  и  $10^{-4}$ , для кривых 3 и 4  $k=1$ ,  $S_m=10^{-5}$  и  $10^{-4}$ ; на фиг. 4 кривые 1-5 отвечают  $S_e=0, 0.25, 1, 5, 10$  соответственно.) Роль молекулярного притяжения быстро падает по мере увеличения интенсивности электрического поля; уже при  $S_e \sim 1$  молекулярным взаимодействием можно пренебречь (по крайней мере при  $k \geq 2$ ). Это отчетливо видно на фиг. 3. Еще раньше исчезает влияние молекулярного притяжения при больших  $k$ . Поэтому результаты фиг. 4, полученные при  $S_m=10^{-4}$ , вполне характеризуют зависимость диффузионного потока от интенсивности электрического поля и отношения радиусов частиц при не слишком малых полях. В этой области полученные зависимости хорошо аппроксимируются выражением

$$(3.9) \quad q = 1/2 (k^2 S_e)^{1/2}$$

Для сравнения на фиг. 4 пунктиром показана зависимость  $q_0 = \varphi_0^{-1}$ , рассчитанная по формуле (3.8). Очевидно, что даже достаточно большие поля не в состоянии полностью подавить замедление диффузии вследствие гидродинамического торможения капель.

**4. Расчет сил электрического взаимодействия капель.** Сила взаимодействия пары проводящих капель во внешнем поле напряженности  $E$  определяется путем решения задачи теории потенциала в бисферической системе координат. Задача эта впервые решена в [10], однако приведенные там результаты не позволяют найти значения сил в требуемом диапазоне параметров. В связи с этим выражения для сил, использованные в расчетах, были получены заново. Для радиальной и окружной составляющих силы имеем

$$F_r = -\epsilon E^2 R_2^2 [A_1 \cos^2 \theta - A_2 \sin^2 \theta], \quad F_\theta = -\epsilon E^2 R_2^2 A_3 \sin 2\theta$$

$$A_1 = \text{sh}^2 \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} [P_{1,n} A_{1,n} + k_1^2 P_{2,n} A_{2,n} + k^2 P_{3,n} A_{3,n} + k_1 k_2 (P_{2,n} A_{3,n} + P_{3,n} A_{2,n}) + k_1 (P_{1,n} A_{2,n} + P_{2,n} A_{1,n}) + k_2 (P_{1,n} A_{3,n} + P_{3,n} A_{1,n})] a_{2,n}$$

$$A_2 = 2 \text{sh}^2 \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} n(n+1)(2n+1) P_{4,n} [P_{4,n} - (2n+4)(2n+1)^{-1} \text{ch} \mu_2 e^{-\mu_2}]$$

$$A_3 = -\text{sh}^2 \mu_2 e^{-\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} (n+1) [(n+2) P_{4,n+1} (P_{1,n} + k_1 P_{2,n} + k_2 P_{3,n}) -$$

$$- n P_{4,n} (P_{1,n+1} + k_1 P_{2,n+1} + k_2 P_{3,n+1})]$$

$$a_{1,n(2,n)} = \exp[-(2n+1)\mu_{1(2)}], \quad a_{3,n} = 1 - a_{1,n} a_{2,n}$$

$$\mu_i = \ln [b_i + (b_i^2 - 1)^{1/2}] \quad (i=1, 2)$$

$$b_1 = x(1 + 1/2x)k^{-1}(1+k+x)^{-1} + 1, \quad b_2 = x(k + 1/2x)(1+k+x)^{-1} + 1$$

$$A_{k,n} = P_{k,n}(2n+1) - \text{ch} \mu_2 e^{-\mu_2} (2n+2) P_{k,n+1}$$

$$P_{1,n} = (2n+1) \frac{(1+a_{1,n})}{a_{3,n}}, \quad P_{2,n} = \frac{a_{1,n}}{a_{3,n}}, \quad P_{3,n} = \frac{1}{a_{3,n}}, \quad P_{4,n} = \frac{(1-a_{1,n})}{a_{3,n}}$$

$$k_{1(2)} = (-1)^{1(2)} \{ S_0(\mu_{1(2)}) [S_1(\mu_{2(1)}) + S_1(0)] - S_0(0) [S_1(\mu_{1(2)}) + S_1(0)] \} [S_0(\mu_1) S_0(\mu_2) - S_0^2(0)]^{-1}$$

$$S_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^m \frac{\exp\{-(2n+1)(\mu_1 + \mu_2 - \xi)\}}{1 - \exp\{-(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)\}}$$

Здесь  $\theta$  — угол между линией центров частиц и направлением внешнего поля.



При малых расстояниях между поверхностями частиц ( $x \leq 0.1$ ) коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  хорошо аппроксимируются степенными выражениями

$$A_i(x, k) = \alpha_i(k) x^{-\beta_i(k)}, \quad i=1, 2, 3$$

Значения  $\alpha_i(k)$  и  $\beta_i(k)$  для различных  $k$  приведены ниже.

$k$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\alpha_3$	$\beta_3$
1	0.214	0.815	0.0915	0.0141	0.170	0.122
2	0.492	0.805	0.1400	0.0111	0.298	0.133
5	0.831	0.805	0.1037	-0.0015	0.381	0.082
10	0.949	0.810	0.0491	-0.0063	0.300	0.071
20	0.979	0.816	0.0175	-0.0092	0.193	0.065
50	0.975	0.823	0.0035	-0.0111	0.091	0.061
100	0.980	0.824	0.0010	-0.0120	0.048	0.059

Авторы признательны Г. И. Баренблатту, А. И. Леонову, В. И. Логинову и Л. П. Смирнову за обсуждение и критику работы.

Поступила 7 IV 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Енгов В. М., Каминский В. А., Синайский Э. Г. О захвате мелких капель крупными в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
2. Дерягин Б. В. Теория коагуляции зольей с учетом расклинивающего давления и механических свойств тонких слоев, Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 5.
3. Дерягин Б. В., Муллер В. М. О медленной коагуляции гидрофобных коллоидов. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 4.
4. Spielman O. A. Viscous interactions in Brownian coagulation. J. Coll. Interface Sci., 1970, vol. 33, No. 4.
5. Леонтович М. А. Статистическая физика. М., Гостехиздат, 1944.
6. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
7. Goren S. L. The normal force exerted by creeping flow on a small sphere touching a plane. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 3.
8. Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
9. Кадер Б. А. К строению вязкого подслоя турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
10. Davis M. H. Two charged spherical conductors in uniform electric field: forces and field strength. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1964, vol. 17, pt 4.