

## ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА

А. П. ВАСИЛЬКОВ, И. Н. МУРЗИНОВ

(Москва)

Рассматривается плоское ламинарное течение Куэтта, в котором на верхней границе задан вдув инородных частиц. На основе уравнений двухжидкостной теории анализируется влияние частиц на трение и теплообмен.

Двухфазный пограничный слой на пластине в пренебрежении воздействием частиц на поле течения газа рассмотрен в работах [1, 2]. В работе [3] получено решение для ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом динамического и теплового влияния частиц на параметры газа. Имеются также решения для случая импульсного движения пластины в двухфазной среде [4-6], причем в [5, 6] учитывалось локальное вращение частиц. Простейшей моделью, выясняющей влияние частиц на трение и теплообмен для общего случая, когда частицы не находятся в равновесии с газом на внешней границе пограничного слоя, является течение Куэтта. Такое течение при вдуве частиц с неподвижной поверхности и в предположениях постоянной вязкости газа и простейшего закона сопротивления и теплообмена частиц рассмотрено в работе [7]. Решение для разгонного течения Куэтта в отсутствие вдува частиц со стенки получено в работе [8]. В данной работе в достаточно общих предположениях получено численное решение задачи о двухфазном течении Куэтта со вдувом частиц и кроме этого получены простые формулы, полезные для оценок влияния частиц на трение и теплообмен.

Рассмотрим плоское ламинарное течение Куэтта между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии  $\delta$ . Направляя ось  $x$  вдоль течения, ось  $y$  перпендикулярно  $x$ , будем полагать, что скорость газа  $u$  обращается в нуль при  $y=0$  и равна  $u_e$  при  $y=\delta$ . Через верхнюю границу течения  $y=\delta$  зададим вдув частиц  $Q$ , соударение частиц с неподвижной поверхностью будем полагать абсолютно неупругим. Предполагая, что все параметры течения не зависят от  $x$ , уравнения, описывающие течение в рамках модели взаимопроникающего движения сплошных сред [8], имеем в виде

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \rho_s v_s = -m_s, \quad v_s' = -g T^n \beta \\
 & v_s u_s' = g \beta T^n (u - u_s), \quad v_s T_s' = \varphi \beta T^n \text{Nu} (T - T_s) \\
 & p' = -g T^n \beta m_s M, \quad \text{Re}^{-1} (T^n u')' + m_s u_s' = 0 \\
 & \text{Re}^{-1} [T^n (u u' + M^{-1} \text{Pr}^{-1} T')] + m_s (\lambda M^{-1} T_s' + u_s u_s' + v_s v_s') = 0 \\
 & m_s = \frac{Q}{\rho_* u_e}, \quad \beta = \frac{\delta}{u_e \tau}, \quad \tau = \frac{2 \rho_s \circ a^2}{9 \mu_e}, \quad \varphi = \frac{1}{3 \text{Pr} \lambda} \\
 & \lambda = \frac{c}{c_p}, \quad M = \frac{u_e^2}{c_p T_e}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_* u_e \delta}{\mu_e}, \quad g = c_x \frac{\text{Re}_s}{24}
 \end{aligned}$$

Здесь индекс  $s$  относится к параметрам частиц, штрих означает дифференцирование по  $y$ . Предполагается, что вращательным движением частиц можно пренебречь, частицы сферические одного и того же радиуса  $a$ , газ совершенный с постоянной теплоемкостью  $c_p$ , число Прандтля  $\text{Pr} = \text{const}$ , зависимость вязкости газа от температуры принята степенной  $\mu = \mu_e (T/T_e)^n$ , где индекс  $e$  относится к параметрам на верхней границе.

Уравнения (1) записаны в безразмерном виде, при этом скорости отнесены к  $u_e$ , координата — к  $\delta$ , температуры — к  $T_e$ , давление — к  $P_e$ , плотность частиц  $\rho_s$  — к  $\rho_* = \rho_e (c_p T_e)^{-1}$ ,  $\rho_s^c$  — плотность материала частиц,  $c$  — его теплоемкость,  $c_x$  — коэффициент сопротивления частицы, число Рейнольдса  $Re$ , построено по относительной скорости частиц и их диаметру.

Граничные условия для (1)

$$(2) \quad \begin{aligned} y=1 \quad u=T=p=1, \quad u_s=k_u, \quad T_s=k_t, \quad v_s=-k_v \\ y=0 \quad u=0, \quad T=t_w \quad (\text{или } T'=0) \end{aligned}$$

Таким образом, в частном случае стоксовского закона сопротивления и теплообмена  $g=1$ ,  $Nu=2$  задача определяется набором параметров подобию

$$(3) \quad n, Pr, \lambda, \beta, Re, M, t_w, k_u, k_t, k_v, m_s$$

В общем случае, когда  $g$  и число Нуссельта  $Nu$  являются функциями чисел Маха  $M_s$  и Рейнольдса  $Re_s$ , построенных по относительной скорости частиц, к (3) добавляются еще два параметра:  $\gamma$  — коэффициент адиабаты и характерное число Рейнольдса частиц  $Re_* = 2ar_* u_e \mu_e^{-1}$ . Следует, однако, заметить, что в реальном случае обтекания тела двухфазным потоком не все параметры в (3) будут независимыми.

Система (1) для  $n=0$ ,  $g=1$ ,  $Nu=2$  допускает решение в квадратурах [7], однако ввиду чрезвычайной громоздкости оно не поддается простому анализу. Полезнее оказывается получить непосредственно решение (1) при малых  $m_s$ . Разлагая все функции в ряд по  $m_s$ , в нулевом приближении получим течение Куэтта чистого газа [9], по которому определяются параметры частиц нулевого приближения. Опуская выкладки, приведем результаты для поправок первого порядка для трения и теплового потока на неподвижной стенке, отнесенных соответственно к  $\rho_* u_e^2$  и  $\rho_* u_e^3$ . Если трение и конвективный тепловой поток на стенке представлены в виде  $c_w = c_{w0} + m_s c_{w1} + \dots$ ,  $q_w = q_{w0} + m_s q_{w1} + \dots$ , то можно получить

$$(4) \quad c_{w1} = \frac{1}{4} + \frac{k_u}{2(1+\alpha)} + \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{1}{\alpha+1} - \ln \frac{\alpha+1}{\alpha} \right), \quad \alpha = k_v \beta^{-1} - 1$$

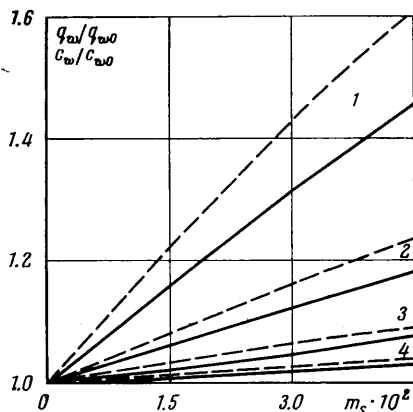
Для  $q_{w1}$  получается несколько более сложное выражение, для которого приведем асимптотику при  $\alpha \rightarrow \infty$  (реально в силу малой толщины пограничного слоя  $\beta$  мало, а, следовательно велико  $\alpha$ )

$$(5) \quad \begin{aligned} q_{w1} &\sim \alpha^{-1} (f_1 + f_2 + f_3) \\ f_1 &= \frac{1}{3 Pr M} \left( k_t - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} t_w - \frac{M Pr}{12} \right) \\ f_2 &= k_u (k_u - 1/3), \quad f_3 = k_v^2 / 2 \end{aligned}$$

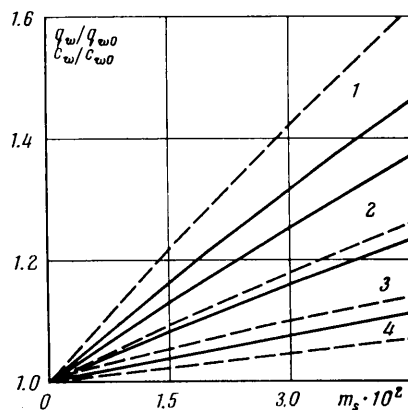
Здесь член  $f_1$  соответствует вкладу в тепловой поток, обусловленному теплообменом частиц с газом,  $f_2$ ,  $f_3$  соответствуют изменению кинетической энергии частиц за счет изменения продольной и поперечной составляющих их скорости. Заметим, что из условия необращения  $v_s$  в нуль, следовательно,  $\rho_s$  в бесконечность внутри области течения можно получить неравенство  $\alpha \geq 0$ . Для наглядности приведем еще асимптотику (4) при  $\alpha \rightarrow \infty$

$$(6) \quad c_{w1} \sim \frac{1}{2\alpha} \left( k_u - \frac{1}{3} \right)$$

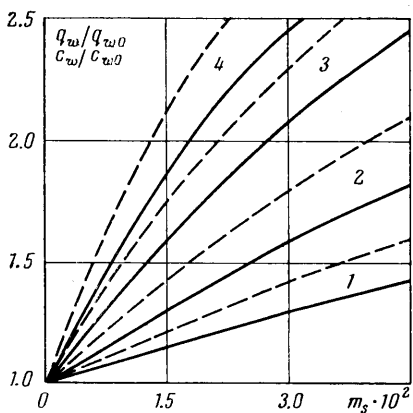
Интересно отметить, что в то время как  $q_{w1}$  зависит от всех параметров подобия, за исключением  $Re$ , величина  $c_{w1}$  определяется лишь значением  $k_u$  и произведением  $k_v\beta^{-1}$ . При  $k_u < 1/3$  (для больших  $\alpha$ ) поправка для трения и соответствующий член для теплового потока оказываются отрицательными, т. е. преобладающее влияние на формирование профиля скорости газа оказывает торможение потока газа вблизи  $y=1$  за счет сопротивления частиц. В зависимости от соотношения между параметрами член  $f_1$



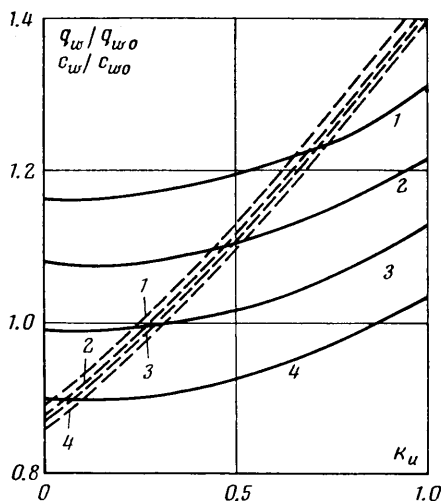
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

может быть как положителен, так и отрицателен,  $f_3 > 0$  всегда, так как частицы в поперечном направлении всегда тормозятся. Численные расчеты подтверждают, что качественно эти выводы справедливы и в общем случае.

При численном решении система (1) разделялась на подсистемы уравнений первого и второго порядка [10]. Уравнения второго порядка для  $u$ ,  $T$  решались прогонкой, а уравнения первого порядка — с использованием стандартного алгоритма, при этом для  $u$  и  $T$  применялось интерполирование. Итерации, состоявшие из последовательного решения уравнений первого и второго порядков, производились до сходимости, определявшейся таким образом, чтобы значения теплового потока и трения на стенке

из двух последовательных итераций отличались между собой с заданной точностью. В численном решении для коэффициента сопротивления и числа Нуссельта частиц использовались аппроксимации работы [11]

$$c_x = c_{x0} (1 + 0.191 c_{x0} M_s)^{-1}, \quad c_{x0} = 24 \text{Re}_s^{-1} + 4.4 \text{Re}_s^{-1/2} + 0.42$$

$$\text{Nu} = \text{Nu}_0 (1 + 3.42 \text{Nu}_0 M_s \text{Pr}^{-1} \text{Re}_s^{-1})^{-1}, \quad \text{Nu}_0 = 2 + 0.459 \text{Re}_s^{0.55} \text{Pr}^{0.33}$$

В основном расчетном варианте были приняты следующие значения параметров подобия:  $n=0.5$ ,  $\text{Pr}=0.72$ ,  $\lambda=1$ ,  $k_u=1$ ,  $k_v=0.3$ ,  $k_t=1$ ,  $m_s=0.03$ ,  $\text{Re}=10^2$ ,  $t_w=0.2$ ,  $M=0.5$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\text{Re}_*=1$ . При  $c_p=10^3$  дж/кг·град,  $\mu_e$ , определенном по Сатерленду через  $\mu_0$  при 300°К,  $\rho_s^\circ=10^3$  кг/м<sup>3</sup> эти значения параметров соответствуют радиусу частиц  $a=0.3$  мк. Кроме этого для принятых значений параметров имеем  $\delta/a=2 \cdot 10^2$ ,  $\rho_s^\circ/\rho_*=9 \cdot 10^3$ ,  $u_e=22.4 \sqrt{T_e^\circ \text{K}}$  м/сек. На фиг. 1–3 представлены зависимости конвективного теплового потока (сплошные линии) и трения на стенке (штриховые линии), отнесенных к соответствующим значениям в чистом газе, от интенсивности вдува частиц  $m_s$ . Фиг. 1 иллюстрирует изменение трения и теплового потока с увеличением радиуса частиц: кривые 1–4 соответствуют  $a=0.3, 0.6, 1.2, 2.4$  мк.

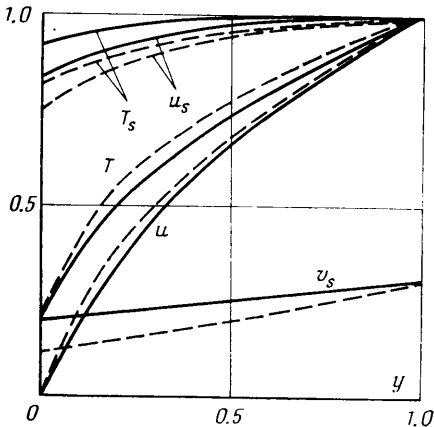
Уменьшение влияния частиц с увеличением их радиуса объясняется снижением величины суммарной поверхности частиц, с увеличением которой происходит рост динамического и теплового взаимодействия между фазами. На фиг. 2 показано влияние параметра  $M$ , который связан с числом Маха на внешней границе  $M_e$  соотношением  $M=(\gamma-1)M_e^2$ . С увеличением  $M$ , т. е. с ростом вязкой диссипации в газовой фазе, относительное влияние частиц убывает. Кривые 1–4 на фиг. 2 соответствуют  $M=0.5, 4, 10, 20$ . Существенно возрастает влияние частиц с увеличением числа Рейнольдса течения  $\text{Re}$  (фиг. 3). На фиг. 3 кривые 1–4 относятся к  $\text{Re}=100, 200, 400, 600$  соответственно. С увеличением  $\text{Re}$  для случая чистого газа происходит уменьшение трения  $c_{w0}$  и теплового потока  $q_{w0}$ , в связи с этим возрастает относительный вклад частиц в трение и тепловой поток. Отметим, что в решении для малых  $m_s$ , полученном выше, поправки для трения и теплового потока не зависят от  $\text{Re}$ , поэтому величины  $(c_w/c_{w0}-1)$  и  $(q_w/q_{w0}-1)$  растут прямо пропорционально  $\text{Re}$ . В общем случае, как видно из фиг. 3, эта зависимость от  $\text{Re}$  несколько слабее.

При рассмотрении результатов расчета, представленных на фиг. 1–3, следует иметь в виду, что при варьировании одного из определяющих задачу параметров (для заданного  $m_s$ ), остальные параметры принимались такими же, как в основном расчетном варианте. Зависимости для  $q_w/q_{w0}$  и  $c_w/c_{w0}$  от  $m_s$  качественно одинаковы при изменении параметров  $\beta$ ,  $M$  и  $\text{Re}$ . Однако поведения трения и теплового потока качественно различаются при изменении начальных условий для параметров частиц  $k_t$  и  $k_u$  (остальные параметры при этом имеют такие же значения, как и в основном варианте).

На фиг. 4 показаны зависимости  $q_w/q_{w0}$  (сплошные кривые) и  $c_w/c_{w0}$  (штриховые) от параметра  $k_u$  для  $k_t=1.0, 0.7, 0.4, 0.1$  (кривые 1–4 соответственно). В то время как  $c_w/c_{w0}$  весьма слабо зависит от изменения  $k_t$ ,  $q_w/q_{w0}$  существенно меняется с варьированием параметра  $k_t$ . Уменьшение  $k_t$ , т. е. снижение начальной температуры частиц, приводит к охлаждению газа, поэтому с уменьшением  $k_t$  сильно падает величина  $q_w$ . Однако, поскольку на трении изменение  $k_t$  может сказаться лишь через вязкость, влияние  $k_t$  на трение незначительно.

Интересно отметить, что для холодных частиц ( $k_t=0.1$ ) охлаждение газа из-за теплообмена с частицами может быть все же компенсировано

диссипацией кинетической энергии частиц при достаточно большой их начальной продольной скорости, а для  $k_u=1$  диссипация даже превалирует и тепловой поток увеличивается по сравнению с чистым газом. В связи с этим отметим, что даже при малой концентрации частиц в набегающем потоке, когда их влиянием на невязкое поле течения можно пренебречь,



Фиг. 5

частицы могут оказать заметное влияние на трение и тепловой поток в случае, когда их продольная скорость и температура на границе пограничного слоя близки к соответствующим параметрам газа или превышают их. В этом случае для сильно охлажденной стенки эффекты охлаждения частиц и диссипации их кинетической энергии в пограничном слое суммируются. Случай  $k_u=1$  реализуется, например, при гиперзвуковом обтекании клина или конуса двухфазным потоком [12]. Это обстоятельство тем более важно, что для тонких конусов поток кинетической энергии частиц на поверхность тела относительно невелик и главное значение приобретают конвективные тепловые потоки. В качестве иллюстрации на фиг. 5 сплошными линиями показаны профили скоростей и температур газа и частиц в основном расчетном варианте. Для сравнения штриховыми линиями на фигуре приведены соответствующие профили в случае стоксовского закона сопротивления и теплообмена, т. е. для  $g=1$ ,  $Nu=2$ .

Поступила 28 VII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Soo S. L. Fluid dynamics of multiphase systems. Waltham, Mass. — Toronto — London, Blaisdell Publ. Co., 1967 (русск. перев.: Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971).
2. Ларионов И. Д., Сыромятников Н. И. О структуре пристенной зоны дисперсного потока при продольном обтекании плоской пластины. Инж.-физ. ж., 1972, т. 23, № 4.
3. Singleton R. E. The compressible gas-solid particle flow over a semi-infinite flat plate. Z. angew. Math. und Physik, 1965, vol. 16, No. 4.
4. Liu J. T. C. Flow induced by the impulsive motion of an infinite flat plate in a dusty gas. Astronaut. Acta, 1967, vol. 13, No. 4.
5. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. О слое течения суспензии твердых частиц в вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
6. Hamed A., Tabakoff W. Analysis of nonequilibrium particulate flow. AIAA paper, 1973, No. 687.
7. Quan V. Couette flow with particle injection. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1972, vol. 15, No. 11.
8. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, № 3.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
10. Воронкин В. Г. Расчет вязкого ударного слоя на притупленных конусах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
11. Алемасов В. Е., Дрегалли А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей. М., «Машиностроение», 1969.
12. Probstein R. F., Passio F. Dusty hypersonic flows. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 4.