

О МИНИМИЗАЦИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ КРОМОК ВЫСТУПАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБЪЕКТА

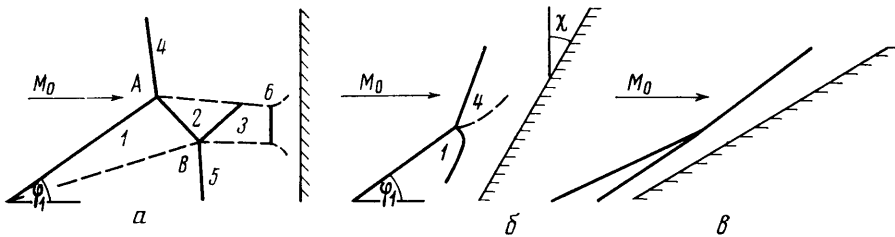
Ю. А. ПОЛЕЖАЕВ

(Москва)

Приводится приближенный метод расчета давления на критической линии цилиндрической кромки элемента конструкции, выступающего над поверхностью гиперзвукового объекта. На основе проведенных расчетов и анализа экспериментальных данных предложены корреляционные зависимости распределения давления в областях интерференции.

На основе полученной модели расчета давления ставятся и решаются вариационные задачи поиска формы передней кромки, обладающей минимальным сопротивлением. Решения ищутся с использованием принципа максимума Понтрягина. Проводится анализ влияния на профиль минимального сопротивления чисел M и затупления тела. Показано преимущество оптимальной формы кромки по сравнению с соответствующей прямолинейной.

1. При обтекании препятствия, выступающего над поверхностью тела, возникает сложная пространственная картина течения в области падения скачков уплотнения на переднюю затупленную кромку и их взаимодействия с местным скачком уплотнения перед выступающим элементом. Такие течения в настоящее время не поддаются прямому теоретическому



Фиг. 1

анализу. Для приближенного решения используем различные упрощенные схемы обтекания на основе анализа результатов экспериментальных исследований.

Взаимодействие скачков уплотнения может иметь место в окрестности присоединения оторвавшегося пограничного слоя и в окрестности падения головной ударной волны на поверхность выступающего элемента. В указанных областях в результате возникновения своеобразной конфигурации пересечения скачков уплотнения образуются струйки газа с меньшими потерями полного давления, чем в соседних областях. Эти низкоэнтропийные струйки при попадании на поверхность выступающего элемента существенно интенсифицируют давление и теплообмен [1-4].

Проведенные экспериментальные исследования картин обтекания выступающих элементов при взаимодействии скачков уплотнения показы-

вают [1-4], что конфигурации пересечения скачков уплотнения можно разбить на три основных типа (см. фиг. 1): тип I — пересечение скачков уплотнения с образованием λ -скачков с двумя тройными точками (фиг. 1, а); тип II — пересечение скачков уплотнения с образованием λ -скачка с одной тройной точкой (фиг. 1, б); тип III — пересечение скачков уплотнения с образованием веера волн разрежения, при котором взаимодействие не приводит к повышению давления (фиг. 1, в).

При больших числах M взаимодействие типа I проявляется в основном при нулевых или малых углах стреловидности, тип II имеет место при умеренных углах стреловидности ($\chi \approx 30^\circ$) и тип III — при больших углах стреловидности цилиндра ($\chi \geq 60^\circ$).

2. Расчет давления P_s на критической линии бесконечного цилиндра можно проводить по формулам [5]

$$(2.1) \quad \frac{P_s}{P} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_n^2 \right)^{1/\gamma-1} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_n^2 - (\gamma-1)} \right]^{1/\gamma-1} \quad (M_n \geq 1)$$

$$(2.2) \quad \frac{P_s}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_n^2 \right)^{1/\gamma-1} \quad (M_n < 1)$$

Формулы (2.1) и (2.2) в диапазоне $0 < M_n < 25$ с удовлетворительной точностью аппроксимируются следующей зависимостью:

$$(2.3) \quad \frac{P_s}{P} \approx 0.92(1 + 1.3M_n^2)$$

Здесь P — давление в набегающем потоке; $M_n = M \cos \chi$ — нормальная составляющая числа M ; χ — угол стреловидности.

Для определения максимальных величин давления P_m в области взаимодействия вдоль критической линии цилиндра необходимо рассчитать образующиеся конфигурации пересечения скачков уплотнения. Известно, что конфигурация λ -скачков, которая имеет место при взаимодействии, может образоваться при наличии тангенциального разрыва, исходящего из узловой точки [6]. На этом разрыве должны быть выполнены условия равенства направлений потоков и статических давлений. В соответствии с обозначениями на фиг. 1 эти условия для взаимодействия типа I записываются так:

$$(2.4) \quad \begin{cases} P_{2+k} = P_{4+k} \\ \theta_{1+k} + \theta_{2+k} = \theta_{4+k} \end{cases}$$

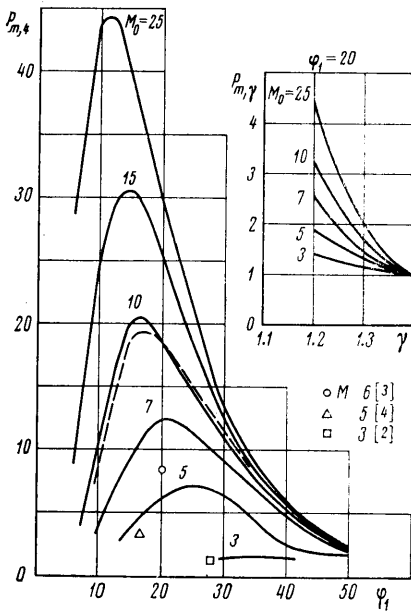
$k=0,1$ для узловых точек A и B соответственно. Здесь θ_{i+k} , P_{i+k} — углы скоса потока и отношения статического давления за соответствующим скачком уплотнения к давлению в невозмущенном потоке P .

Используя известные газодинамические соотношения для косых скачков уплотнения, условия (2.4) можно привести к системе четырех трансцендентных уравнений, аналогичных [4] (по два для точек A и B). При заданном числе M_0 набегающего потока и угле φ_1 падающего скачка уплотнения численное решение этой системы уравнений позволяет определить углы скачков φ_2 , φ_3 , φ_4 и φ_5 , после чего легко вычислить параметры M , P и θ и в конечном итоге максимальную величину давления P_m в области взаимодействия.

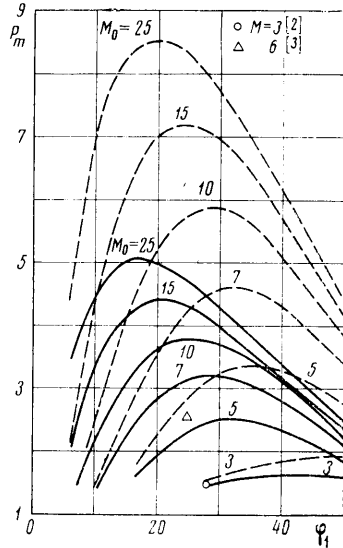
На фиг. 2 приведены результаты расчета относительных величин давлений $P_{m,i} = P_m / P_i$ при $\gamma=1.4$ для различных углов падающего скачка уплотнения φ_1 и чисел M_0 набегающего потока. Давление существенно

зависит от φ_1 и M_0 ; при $M_0=25$ давление может достигать величины, в 44 раза превышающей давление вне области взаимодействия. Расчет давления проводился с учетом отклонения потока за скачком Z и без учета слабых волн разрежения и сжатия, возникающих в струе в результате отражения скачка Z от тангенциальных разрывов. Учет последнего факта, проведенный в работе [3], как показывает сравнение с настоящими расчетами (штриховая линия на фиг. 2) не приводит к существенному изменению давления в области взаимодействия.

На фиг. 2 показано также влияние показателя степени адибаты γ на величину отношения максимальных давлений $P_{m,\gamma} = (P_{m,\gamma})_{\gamma} / (P_{m,\gamma})_{\gamma=1.4}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Изменение величины γ от 1.4 до 1.2 приводит еще к двух-, четырехкратному увеличению давления. Экспериментальные данные, приведенные на фиг. 2, получены в работах [2-4] при различных условиях испытаний в аэродинамических трубах. Соответствие расчетных и экспериментальных данных удовлетворительное.

Для взаимодействия типа II основной вклад в давление в области интерференции вносится струйками тока, прошедшими через падающий скачок с углом наклона φ_1 и скачок, параллельный образующей цилиндра [1]. В этом случае расчет давления можно провести, используя зависимости (2.1)–(2.3). Результаты расчета максимального относительного давления P_m представлены на фиг. 3. Как и в случае взаимодействия типа I, отмечается существенная зависимость величины P_m от числа M_0 , угла φ_1 и показателя степени адибаты γ , но величины давлений значительно ниже. Соответствие с экспериментальными данными [2, 3] также удовлетворительное.

3. Основными областями интерференции на кромке выступающего элемента являются: 0 — область взаимодействия с пограничным слоем на поверхности тела и W — область взаимодействия с головной ударной волной.

Распределение давления вдоль критической линии затупленной кромки представим в виде

$$(3.1) \quad P = P_s (1 + \Delta P_0 + \Delta P_w^- + \Delta P_w^+)$$

где величины избыточного давления ΔP отнесены к соответствующему давлению на бесконечном цилиндре P_s ; ΔP_0 — избыточное давление в области 0; ΔP_w^- ; ΔP_w^+ — избыточное давление в области W «слева» и «справа» от головной ударной волны.

Для дальнейшего построения модели расчета давления в областях взаимодействия на основе результатов экспериментальных исследований делаются следующие предположения: 1) течение в каждой точке критической линии определяется местными параметрами набегающего потока и местным углом стреловидности; 2) распределение избыточного давления плавно и быстро уменьшается в обе стороны от своего максимума P_m до соответствующей величины на бесконечном цилиндре P_s [2-4]; 3) с уменьшением угла встречи набегающего потока с поверхностью препятствия (с увеличением угла стреловидности) происходит перестройка картины взаимодействия от типа I до типа II и III с соответствующим уменьшением избыточного давления от максимальной величины при взаимодействии типа I до нуля при взаимодействии типа III [3]; 4) при непрерывном уменьшении угла стреловидности вдоль критической линии в области взаимодействия может возникнуть вторичная интерференция.

Основываясь на этих предположениях, распределение давления в каждой из областей взаимодействия можно описать следующей зависимостью:

$$(3.2) \quad \Delta P(s; z) = \Delta P_m \exp \left[\left(\frac{s - s_m}{l} \right)^2 (\ln \pi) \eta(t) \right] \zeta(z)$$

$$\pi = \Delta P_l / \Delta P_m, \quad t = z_m - z, \quad z = \text{tg } \chi$$

Здесь s — координата вдоль критической линии, s_m — координата максимума давления, π — отношение избыточного давления на расстоянии l от точки максимума к максимальному давлению, $\zeta(z)$ — функция влияния угла стреловидности, $\eta(t)$ — функция вторичной интерференции в области взаимодействия, z_m — тангенс угла стреловидности в точке максимума интерференции.

Величины ΔP_m рассчитываются по методу, изложенному в п. 2; ΔP_l , l определяются на основании экспериментальных исследований [1-4]. Функции $\zeta(z)$ и $\eta(t)$ являются полиномами третьей степени, коэффициенты которых также определяются эмпирически путем аппроксимации соответствующих экспериментальных данных.

Расчет необходимых геометрических параметров области 0 (θ , φ_1 , s_m) проводился с помощью эмпирических зависимостей работы [1]. Соответствующие величины s_m и φ_1 в области W определялись по результатам расчета внешнего газодинамического обтекания тела.

4. На основе предложенной модели расчета давления можно решить вариационную задачу минимизации сопротивления передней кромки выступающих элементов сверхзвукового объекта.

Выберем следующую систему координат: начало расположено на поверхности тела, ось X перпендикулярна поверхности, ось Y направлена по потоку вдоль поверхности тела.

Задачу будем решать с помощью принципа максимума Понтрягина [7]. Этот метод нашел широкое применение в задачах автоматического управления, баллистики и т.п., но в вариационных задачах газовой динамики он практически не применялся.

Для рассматриваемой задачи принцип максимума формулируется следующим образом.

Пусть суммарная сила, действующая на переднюю кромку выступающего элемента, пропорциональна функционалу

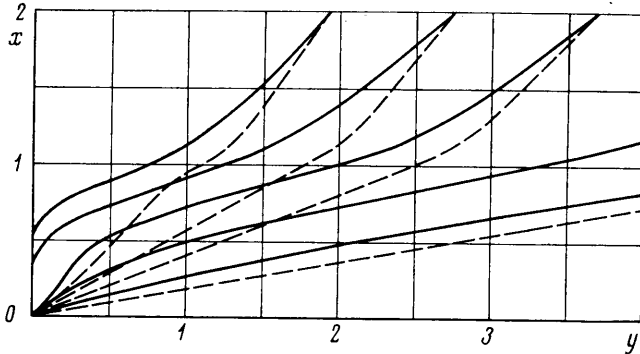
$$(4.1) \quad \int_{x_0} P(x; y(x); z(x)) dx$$

где подынтегральный функционал $P(x; y(x), z(x))$ определяется зависимостями (3.1), (3.2), (2.1)–(2.3) в выбранной системе координат; x_0 и x_1 — начальная и конечная точки.

Закон управления определяется уравнением

$$(4.2) \quad \frac{dy}{dx} = z(x), \quad z \geq 0$$

Для оптимальности $z(x)$ и $y(x)$ в смысле минимума интеграла (4.1) необходимо существование ненулевой функции $\psi = \psi(x)$, соответствующей



Фиг. 4

щей $z(x)$ и $y(x)$, такой, что при любом x на отрезке $x_0 \leq x \leq x_1$ следующая функция H переменного z достигает в точке $z = z(x)$ максимума

$$(4.3) \quad H = \psi(x) z(x) - P(x; y(x); z(x)) = \max_{z \geq 0} [\psi(x) z - P(x; y(x); z)]$$

Функция $\psi(x)$ определяется уравнением

$$(4.4) \quad \frac{d\psi}{dx} = - \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Если правый конец не закреплен и может перемещаться по прямой $x = x_1$, т. е. $y(x_1)$ произвольно, легко получить, используя условие трансверсальности [8] и условие экстремума функции H ($\partial H / \partial z = 0$), что в точках $y(x_1)$

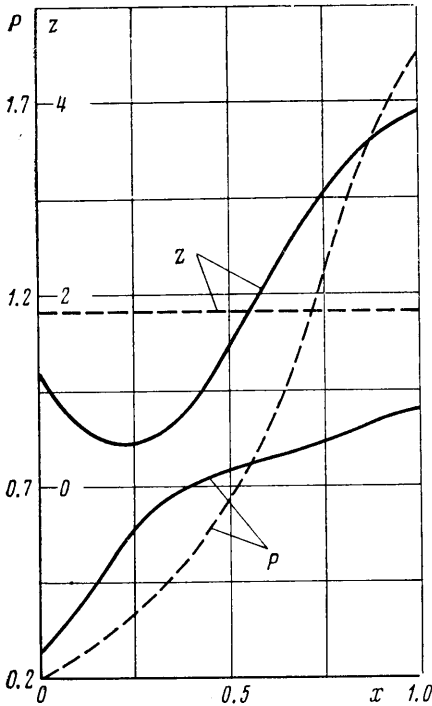
$$(4.5) \quad \psi(x_1) = 0$$

Отметим, что принцип максимума отличается простотой и наглядностью решения, несмотря на некоторую сложность формулировки. Этот метод включает в себя необходимые условия экстремалей Эйлера, Лагранжа, Вейерштрасса, которые следовало бы проверять при классическом подходе к решению вариационных задач [9]. Более того, для линейных задач управления, что имеет место в рассматриваемом случае (см. усло-

вие (4.2)), принцип максимума является достаточным условием оптимальности [7].

5. Проведем расчет формы затупленной кромки, обладающей минимальным сопротивлением. Тело представляет собой затупленный или острый конус с полууглом при вершине 10° . Выступающий элемент расположен на расстоянии 7–14 радиусов затупления от носка для затупленного конуса и на таком же расстоянии от вершины для острого.

Линейные размеры отнесены к расстоянию по оси X от поверхности конуса до головной ударной волны при числе $M=20$. В этом случае координата $x_w=1$. Местные параметры потока при обтекании затупленного конуса определялись в соответствии с данными работы [10], а для острого конуса — по работе [11]. За начальную точку принято $y_0(0)=0$, а конечные точки $y_1(x_1)$ задаются различными на прямой $x_1=2$.



Фиг. 5

На фиг. 4 приведены профили передней кромки выступающего элемента, обладающие минимальным сопротивлением при $M=20$, для затупленного (сплошные линии) и острого (штриховые линии) конусов.

Эти профили получены путем численного решения краевой задачи при различных значениях координаты конца y_1 . Оптимальные профили имеют вогнуто-выпуклые формы и существенно отличаются от прямолинейных. В областях взаимодействия местные углы стреловидности имеют большие величины. С увеличением координаты y_1 оптимальные профили постепенно спрямляются. Форма передней части тела также оказывает значительное влияние на профили минимального сопротивления выступающих элементов вследствие различного распределения параметров набегающего потока в области между головной ударной волной и поверхностью тела.

Рис. 5

Рис. 5

Расчеты показывают, что с уменьшением чисел M оптимальные профили кромки постепенно спрямляются. На фиг. 5 при $M=20$ приведено сравнение изменения давления (подынтегрального функционала P (4.1)) и тангенса угла стреловидности z на профиле с минимальным сопротивлением (сплошные линии) и на соответствующем прямолинейном профиле (штриховые линии) для выступающего элемента, установленного на затупленном конусе при $y_0=0$ и $y_1=1.82$. В этом случае максимальное отличие величин давления на профиле с минимальным сопротивлением в 3 раза меньше, а общее сопротивление при этом на 22% меньше, чем для прямолинейного профиля. Таким образом, нагрузка на оптимальную кромку значительно меньше и более равномерно распределена вдоль критической линии. При уменьшении координаты конца y_1 эта разница будет еще больше увеличиваться в пользу оптимального профиля в результате усиления эффектов интерференции в области взаимодействия на прямолинейной кромке.

Нижние кривые, приведенные на фиг. 4, получены в результате реше-

ния вариационной задачи с незакрепленным правым концом, когда на прямой x_1 выполнялось условие (4.5). Эти профили имеют наименьшее значение интеграла (4.1) по сравнению с остальными оптимальными профилями, полученными при решении краевых задач с закрепленным правым концом при тех же условиях обтекания.

В заключение отметим, что характер распределения тепловых потоков вдоль критической линии выступающего элемента качественно соответствует изменению давления [³]. Поэтому аналогичные результаты можно ожидать при решении задач по отысканию профиля кромки, обладающего минимальным интегральным тепловым потоком.

Поступила 24 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдусевский В. С., Медведев К. И.* Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
2. *Зубков А. И., Панов Ю. А., Войтенко Д. М.* Исследование систем скачков уплотнения и характера течения перед наклонным препятствием. Ин-т механ. МГУ, Отчет 1969, № 988.
3. *Keyes J. W., Hains F. D.* Analytical and experimental studies of shock interference heating in hypersonic flows. NASA Techn. Note 1973, TN D - 7439.
4. *Тетерин М. П.* Исследование течения газа в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
5. *Reshotko E., Beckwith I.* Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number. NASA Rept, 1958, No. 1379.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
8. *Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление. М., Гостехиздат, 1958.
9. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
10. *Лунев В. В., Магомедов К. М., Павлов В. Г.* Гиперзвуковое обтекание притупленных конусов с учетом равновесных физико-химических превращений. М., ВЦ АН СССР, 1968.
11. *Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В.* Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.