

О ПОВЕДЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ ОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СРЕДЫ

В. А. САБЕЛЬНИКОВ

(Москва)

Вырождение турбулентного движения в несжимаемой электропроводной жидкости, находящейся в постоянном по всему пространству внешнем магнитном поле в пренебрежении нелинейными эффектами, рассматривалось в ряде работ (см. библи. в [1-3]).

В данной работе формулируется задача о поведении однородной магнитогидродинамической турбулентности при одновременном воздействии на нее магнитного поля и однородной деформации среды, вызванной постоянными по пространству градиентами средней скорости в безындукционном приближении и пренебрежении нелинейными и вязкими эффектами.

В этом случае изменение турбулентных пульсаций скорости будет определяться не только диссипацией энергии турбулентности вследствие тепловыделения под влиянием электрических токов, индуцируемых в жидкости при пульсациях скорости в магнитном поле, но и порождением турбулентной энергии вследствие работы напряжений Рейнольдса на градиентах средней скорости.

Проведены численные расчеты изменения характеристик турбулентности (средних квадратов компонент вектора пульсационной скорости, напряжения сдвига и интегральных масштабов длины) при стационарном поперечном сдвиге средней скорости в продольном и перпендикулярном к плоскости осредненного течения магнитных полей для первоначально изотропной турбулентности. Результаты расчетов для продольного магнитного поля качественно согласуются с результатами экспериментальных исследований по свойствам магнитогидродинамической турбулентности в сдвиговых сечениях.

1. Рассматривается заполняющая бесконечное пространство однородная среда с заданными статистическими характеристиками турбулентности, которая в момент времени t_0 подвергается действию постоянного по всему пространству внешнего магнитного поля \mathbf{H} и однородной деформации, вызванной постоянными по пространству градиентами средней скорости $E_{ij}(t) = \partial U_i / \partial x_j$. Требуется найти изменение статистических характеристик турбулентности во времени в процессе деформации. Сопоставление такой идеализированной постановки задачи с реальными ситуациями рассматривается в [3].

Если скорость деформации и магнитное поле достаточно велики, то в уравнениях можно пренебречь нелинейным взаимодействием пульсационных характеристик и молекулярными эффектами.

Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики для однородной среды в безындукционном приближении, в пренебрежении пульсациями плотности $\rho' = 0$ и без учета молекулярных эффектов переноса имеют вид

$$\frac{Du_i'}{Dt} + u_{\alpha}' E_{i\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_M'}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi\rho} H_{\alpha} \frac{\partial h_i'}{\partial x_{\alpha}}$$
$$p_M' = \left(p' + h_{\alpha}' \frac{H_{\alpha}}{4\pi} \right)$$

$$(1.1) \quad H_\alpha \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + \nu_m \frac{\partial^2 h_i'}{\partial x_\beta \partial x_\beta} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial h_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{dH_i}{dt} = H_\alpha E_{i\alpha} + H_i \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Здесь u_i' , h_i' — пульсации скорости и магнитного поля; ν_m — магнитная вязкость среды; $U_i = E_{i\alpha} x_\alpha$ — средняя скорость, вызванная деформацией среды (с точностью до несущественной аддитивной постоянной). По повторяющимся индексам, обозначенным греческими буквами, предполагается суммирование.

Обозначим через u характерный масштаб изменения пульсаций скорости на характерном масштабе длины турбулентности l ; τ — длительность деформации; $\tau_m = 4\pi\rho\nu_m/H^2$ — масштаб времени, характеризующий величину магнитного поля; $Re_T = ul/\nu$ — число Рейнольдса турбулентности (ν — кинематическая вязкость среды); $Re_M = ul/\nu_m$ — магнитное число Рейнольдса турбулентности, $S_T = H^2 l / 4\pi\rho u \nu_m = \tau_T / \tau_m$ — турбулентное число Стюарта; a — скорость звука; $\tau_r = l/u$ — характерный масштаб времени, на котором происходит изменение энергии турбулентности вследствие инерционных и вязких сил.

Оценка членов в полных уравнениях для пульсационных величин в случае однородной среды показывает:

1) безындукционное приближение (фактически соответствующее пренебрежению генерацией магнитогидродинамических волн турбулентностью) справедливо при следующих ограничениях на параметры турбулентности, деформации и величину магнитного поля:

$$(1.2) \quad Re_M \ll 1, \quad Re_M S_T \ll 1, \quad \tau \gg l^2/\nu_m = \tau_T Re_M$$

или в равносильной форме

$$Re_M \ll 1, \quad \beta_M = \tau_m/\tau \gg Re_M, \quad \beta = \tau/\tau_T \gg Re_M$$

2) пренебрежение нелинейными и вязкими членами в уравнении сохранения количества движения в случае развитой турбулентности $Re_T \gg 1$ справедливо при выполнении неравенств

$$(1.3) \quad \beta \ll 1, \quad \beta_M \ll 1$$

и $\beta \ll Re_T$, $\beta_M \ll Re_T$ при $Re_T \ll 1$

(Если $\beta \approx \beta_M \approx Re_T \ll 1$, то в уравнение сохранения количества движения в системе (1.1) необходимо добавить вязкий член, при этом задача также остается линейной. Этот случай в работе не рассматривается);

3) пренебрежение генерацией акустических волн (т. е. $\rho' = 0$, $\partial u_\alpha' / \partial x_\alpha = 0$) справедливо при выполнении следующих неравенств:

$$(1.4) \quad \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho a}} (Re_M S_T)^{1/2} \ll 1, \quad u^2/a^2 \ll \beta^2, \quad u^2/a^2 \ll \beta_M^2$$

Отметим, что два последних неравенства в (1.2) и (1.4) накладывают ограничение на скорость деформации и величину магнитного поля сверху.

Подробный вывод и анализ большинства приведенных выше неравенств содержится в [3].

В дальнейшем будем предполагать, что неравенства (1.2)–(1.4) выполняются и ограничимся случаем развитой турбулентности, т. е. будем считать, что $Re_T \gg 1$.

Следует подчеркнуть, что система (1.1) при выполнении (1.2)–(1.4) пригодна лишь для описания пульсаций с масштабами порядка l , т. е. пульсаций, дающих основной вклад в энергию турбулентности. На развитие мелкомасштабных пульсаций при этом значительное влияние будет оказывать вязкость и нелинейность. Чтобы (1.1) правильно описывала и мелкомасштабные пульсации, необходимо выполнение более сильных, чем (1.2)–(1.4) неравенств (см. аналогичные рассуждения в [3]).

2. Исследование системы (1.1) удобно проводить с помощью спектрального метода. Перейдем к коэффициентам Фурье по формулам [4]

$$u_i'(\mathbf{x}, t) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) dZ_i(\mathbf{k}, t), \quad h_i'(\mathbf{x}, t) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) dM_i(\mathbf{k}, t)$$

$$p_M'(\mathbf{x}, t) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) dB(\mathbf{k}, t)$$

Здесь \mathbf{k} — волновой вектор.

Тогда система уравнений для пульсационных характеристик (1.1) может быть представлена в виде (подробно аналогичные выкладки проведены в [5, 6])

$$(2.1) \quad \frac{\partial dZ_i}{\partial t} = E_{\alpha\beta} k_\alpha \frac{\partial dZ_i}{\partial k_\beta} - E_{i\alpha} dZ_\alpha - ik_i \frac{dB}{\rho} + i \frac{H_\alpha k_\alpha}{4\pi\rho} dM_i$$

$$(2.2) \quad dM_i = i \frac{H_\alpha k_\alpha}{v_m k^2} dZ_i$$

$$(2.3) \quad k_\alpha dZ_\alpha = 0$$

$$(2.4) \quad k_\alpha dM_\alpha = 0$$

Величины dB и dM_i можно исключить из (2.1), воспользовавшись (2.2)–(2.4). Получим уравнение

$$\frac{\partial dZ_i}{\partial t} = E_{\alpha\beta} k_\alpha \frac{\partial dZ_i}{\partial k_\beta} - E_{i\alpha} dZ_\alpha + 2E_{\alpha\beta} \frac{k_i k_\alpha}{k^2} dZ_\beta - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{(H_\alpha k_\alpha)^2}{v_m k^2} dZ_i$$

характеристическая форма которого имеет вид

$$(2.5) \quad \frac{ddZ_i}{dt} = -E_{i\alpha} dZ_\alpha + 2E_{\alpha\beta} \frac{k_i k_\alpha}{k^2} dZ_\beta - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{(H_\alpha k_\alpha)^2}{v_m k^2} dZ_i$$

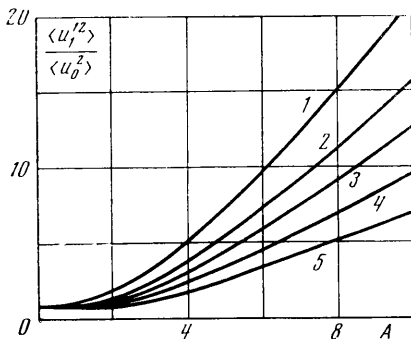
$$\frac{dk_i}{dt} = -E_{\alpha i} k_\alpha$$

Если известно решение уравнений (2.5), когда магнитное поле отсутствует, т. е. при $\mathbf{H}=0$ — $dZ_i^0(\mathbf{k}, t)$, то в общем случае решение записывается в виде ¹⁾

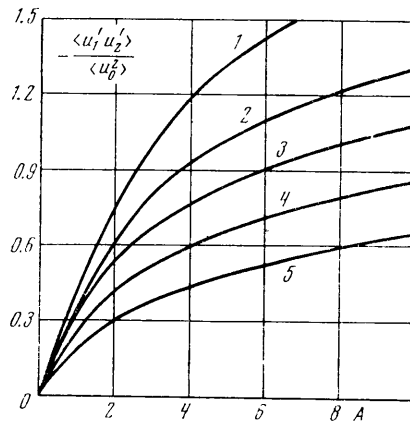
$$(2.6) \quad dZ_i(\mathbf{k}, t) = dZ_i^{(0)}(\mathbf{k}, t) f(t), \quad f = \exp \left[- \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau \right]$$

$$G(t) = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{(H_\alpha k_\alpha)^2}{v_m k^2}, \quad \frac{dk_i}{dt} = -E_{\alpha i} k_\alpha$$

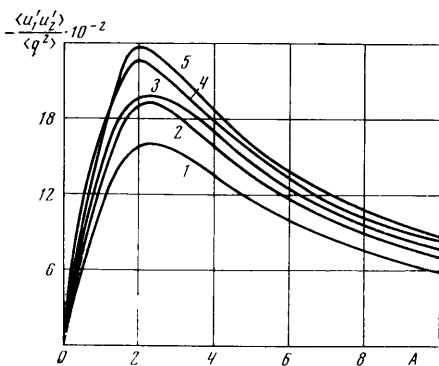
¹⁾ При $\text{Re}\tau \ll 1$ $dZ_i = dZ_i^{(0)} \exp \left[- \int_{t_0}^t (G + v k^2) d\tau \right]$



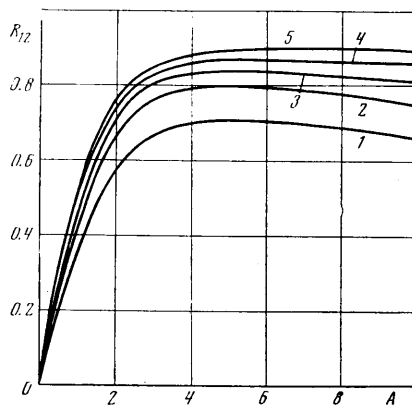
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Знание коэффициентов Фурье позволяет определить многоточечные спектральные тензоры любого ранга, например, для спектральных тензоров второго и третьего рангов Φ_{ijk} (трехточечный) справедливы соотношения [4]

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) d^3k = \langle dZ_i(\mathbf{k}) dZ_j(\mathbf{k}) \rangle, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = 0$$

$$\Phi_{ijl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) d^3k_1 d^3k_2 = \langle dZ_i(\mathbf{k}_1) dZ_j(\mathbf{k}_2) dZ_l(\mathbf{k}_3) \rangle, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$$

Здесь $\langle \rangle$ — знак осреднения.

Поэтому для тензора Φ_{ij} имеем

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) d^3k(t) = \Phi_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, t) f^2(t) d^3k(t_0)$$

$$d^3k(t) / d^3k(t_0) = \rho(t) / \rho(t_0), d^3k = dk_1 dk_2 dk_3$$

Таким образом, известные решения линейных задач теории быстрой деформации однородной турбулентности (4-10) обобщаются на случай деформации однородной магнитогидродинамической турбулентности простым умножением на соответствующий множитель.

По спектральному тензору Φ_{ij} можно найти компоненты тензора напряжений Рейнольдса $-\langle u_i' u_j' \rangle$ и компоненты матрицы интегральных масштабов длины турбулентности $L_{ij}^{(k)}$ (а также не рассматриваемые в работе

двухточечные моменты $\langle u_i'(\mathbf{x}) u_j'(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle = B_{ij}(\mathbf{r})$

$$\langle u_i' u_j' \rangle = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d^3k$$

$$L_{ij}^{(m)} (\langle u_i'^2 \rangle \langle u_j'^2 \rangle)^{1/2} = \pi \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \delta(k_m) d^3k$$

Здесь $\delta(k_m)$ — одномерная функция Дирака.

При $i=j=m$ последнее соотношение определяет интегральный масштаб длины вдоль i -й оси системы координат

$$L_i = L_{ii}^{(i)} = \frac{1}{\langle u_i'^2 \rangle} \int \langle u_i'(\mathbf{x}) u_i'(\mathbf{x}+\mathbf{r}e_i) \rangle dr = \frac{\pi}{\langle u_i'^2 \rangle} \int \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \delta(k_i) d^3k$$

где e_i — единичный вектор вдоль i -й оси.

Отметим также, что с помощью соотношения (2.2) можно найти энергию индуцированного магнитного поля

$$\langle h_i' h_j' \rangle = \frac{H_\alpha H_\beta}{v_m^2} \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \Phi_{ij} d^3k$$

Но так как в безындукционном приближении эта энергия намного меньше кинетической энергии турбулентности [3], определение $\langle h_i' h_j' \rangle$ не представляет особого интереса.

3. В дальнейшем ограничимся анализом случая однородной деформации — стационарным поперечным сдвигом средней скорости, направленной по оси x_1 и линейно меняющейся вдоль оси x_2 . Функции $dZ_i^0(\mathbf{k}, t)$ в этом случае имеют вид [5, 6]

$$dZ_1^{(0)}(\mathbf{k}, t) = dZ_{10}(\mathbf{k}_0, t_0) - A_1 dZ_{20}(\mathbf{k}_0, t_0)$$

$$dZ_2^{(0)}(\mathbf{k}, t) = dZ_{20}(\mathbf{k}_0, t_0) \frac{k_0^2}{k^2}$$

$$dZ_3^{(0)}(\mathbf{k}, t) = dZ_{30}(\mathbf{k}_0, t_0) + A_2 dZ_{20}(\mathbf{k}_0, t_0)$$

$$k_{i0} = k_i(t_0), \quad k_1 = k_{10}, \quad k_2 = k_{20} - A k_{10}, \quad k_3 = k_{30}$$

$$m^2 = k_{10}^2 + k_{30}^2, \quad \varphi = \arctg \frac{k_{20}}{m} - \arctg \frac{k_2}{m}, \quad \left[\frac{k_2}{k^2} \right] = \frac{k_2}{k^2} - \frac{k_{20}}{k_0^2}$$

$$A_1 = \frac{k_0^2 k_3^2}{k_1 m^3} \varphi + \frac{k_0^2 k_1}{m^2} \left[\frac{k_2}{k^2} \right], \quad A_2 = \frac{k_0^2 k_3}{m^3} \left\{ \varphi - m \left[\frac{k_2}{k^2} \right] \right\}$$

Здесь $A = E_{12}(t-t_0)$ — эффективная степень деформации (термин взят из [10]).

При продольном магнитном поле (т. е. направленном по x_1) функция f в (2.6) оказывается равной

$$f_{\parallel} = \exp \left\{ -S \frac{k_{10}}{m} \varphi \right\}$$

При поле, перпендикулярном плоскости осредненного течения

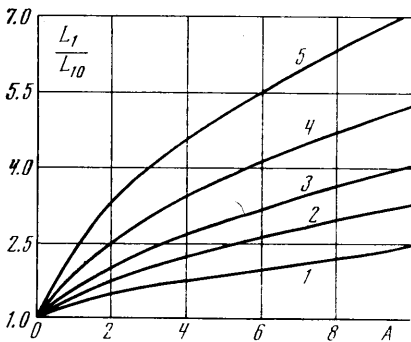
$$f_{\perp} = \exp \left\{ -S \frac{k_{30}^2}{k_{10} m} \varphi \right\}$$

где $S = H^2 / 4\pi \nu_m E_{12}$ — число Стюарта.

На фиг. 1–5 приведены некоторые результаты расчетов изменения в процессе деформации компонент тензора напряжений Рейнольдса $\langle u_i' u_j' \rangle$ и интегральных масштабов L_i для продольного магнитного поля при различных числах Стюарта для первоначально изотропной турбулентности (кривые 1– $S=0$, 2– $S=0.5$, 3– $S=1$, 4– $S=2$, 5– $S=4$). Результаты при этом не зависят от конкретной формы спектральной функции $E_0(k)$, полностью определяющей спектральный тензор Φ_{ij} в изотропной турбулентности в момент $t=t_0$ [4]

$$\left(\langle u_0^2 \rangle = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} E_0(k) dk \right)$$

Наличие магнитного поля, как показывают расчеты, приводит к существенному изменению в поведении характеристик турбулентности. В качестве наиболее характерных примеров



Фиг. 5

укажем на зависимость отношения напряжения сдвига к среднему квадрату пульсационной скорости $-\langle u_1' u_2' \rangle / \langle q^2 \rangle$ ($\langle q^2 \rangle = \langle u_\alpha' u_\alpha' \rangle$) и коэффициента корреляции $R_{12} = -\langle u_1' u_2' \rangle / (\langle u_1'^2 \rangle \langle u_2'^2 \rangle)^{1/2}$ от числа Стюарта.

Результаты расчетов для продольного магнитного поля качественно согласуются с результатами экспериментальных исследований свойств магнитогидродинамической турбулентности в сдвиговых течениях, приведенными в [1–3]. Поэтому можно предположить, что на пространственную структуру магнитогидродинамической турбулентности в области энергосодержащих вихрей определяющее влияние оказывает деформация турбулентных вихрей в поле средней скорости. (Для более полного подтверждения этого вывода, вообще говоря, необходимо рассчитать изменение двухточечных корреляционных моментов $B_{ij}(r)$.) Для свободных турбулентных течений неэлектропроводной жидкости этот результат получен ранее в [10].

Указанный вывод может быть использован для развития полуэмпирической теории расчета турбулентных магнитогидродинамических течений (видимо, только свободных), аналогично тому как это было сделано для обычных свободных турбулентных течений [11, 12].

Автор благодарит В. М. Иевлева за интерес, проявленный к этой работе.

Поступила 1 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Кит Л. Г., Цинобер А. В. О некоторых общих свойствах магнитогидродинамической турбулентности в трубах и их исследовании при помощи кондукционных анемометров. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
2. Брановер Г. Г., Цинобер А. В. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., «Наука», 1970.
3. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М., «Наука», 1975.
4. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
5. Сабельников В. А. Об обменном члене в неизотропных однородных турбулентных течениях с градиентом средней скорости. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 4.
6. Сабельников В. А. Некоторые линейные задачи теории однородной деформации однородной турбулентности. Тр. ЦАГИ, 1975, № 1702.

-
7. *Ribner H. S., Tucker M.* Spectrum of turbulence in a contracting stream. NACA Rt, 1953, No. 1113.
 8. *Batchelor G. K., Proudman I.* The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1954, vol. 7, pt 1.
 9. *Pearson J. R. A.* The effect of uniform distortion on weak homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 5, pt 2.
 10. *Townsend A. A.* Entrainment and the structure of turbulent flow. *J. Fluid Mech.* 1970, vol. 41, pt 1.
 11. *Зимонт В. Л., Сабельников В. А.* Поведение однородной турбулентности в каналах переменной площади сечения. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 2.
 12. *Зимонт В. Л., Сабельников В. А.* Модель турбулентных напряжений в свободных сдвиговых течениях. *Докл. АН СССР*, 1975, т. 222, № 3.
-