бента. Концентрация второго изобара в потоке имеет, вообще говоря, два максимальных и одно минимальное значение. Один максимум движется по среде со скоростью v, второй максимум и минимум — со скоростями, определяемыми из (15).

В заключение авторы благодарят А. Н. Гудкова за обсуждение работы.

Поступила 30 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
3. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., «Наука», 1965.
4. *Бондаренко А. Г., Козорезов Е. В., Колобашкин В. М.* Неравновесная адсорбция радиоактивного газа в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

УДК 533.6.011.8

О НОВОЙ МОДЕЛИ ВРАЩАЮЩИХСЯ МОЛЕКУЛ ГАЗА

Н. А. СЛЕЗКИН

(Москва)

Предполагается, что при ударе двух легко деформируемых вращающихся тел ударные импульсы распределены по малой площадке вблизи начальной точки соприкосновения и приводятся к главному вектору и к главному моменту. Поверхности шаров считаются абсолютно гибкими, если разности векторов скоростей точек касания и угловых скоростей вращения шаров после удара меняют только знаки. Для этого случая выполняются законы сохранения суммы кинетических энергий шаров при их ударе и сохранения элемента объема 12-мерного пространства скоростей, что и служит основанием для введения этой модели вращающихся молекул в кинетическую теорию газов наряду с моделью Бриана.

В кинетической теории газов преимущественно используется модель поступательно движущихся молекул. Наиболее простейшая — модель жестких сфер, парное столкновение которых рассматривается в рамках элементарной теории удара в механике. В других моделях (Максвелла, Сюзерленда, Леннарда — Джонса и др.) поступательно движущиеся молекулы рассматриваются как точечные центры отталкивания и притяжения. Ценность той или иной модели определяется соответствием результатов расчетов по теоретическим формулам результатам экспериментальных измерений, например зависимостью коэффициентов вязкости от температуры.

В 1894 г. Брианом была предложена модель вращающихся сферических молекул, при этом поверхности сфер считались абсолютно упругими и абсолютно шероховатыми. Парное столкновение таких молекул также рассматривалось в рамках элементарной теории удара в предположении, что разность скоростей точек соприкосновения сфер меняет свой знак после столкновения. Расчеты кинетических коэффициентов для этой модели представлены в [1] (гл. II). Из этих расчетов, в частности, для отношения теплоемкостей одноатомных газов получено значение $\gamma={}^4/_3$ вместо ${}^5/_3$. На стр. 249 этой книги сказано: «Примерами газов, у которых значение γ близко к ${}^4/_3$, является хлор ($\gamma=1.355$), а также метан и аммиак ($\gamma=1.310$)». Кроме того, в примечании Б (стр. 463) говорится, что для модели Бриана Колером получена формула для объемного коэффициента вязкости. Модель же поступательно движущихся молекул до сих пор не позволяла получить формулу для коэффициента объемной вязкости. По поводу влияния объемной вязкости в [1] (стр. 465) сказано: «Вследствие наличия объемной вязкости затухание звуковых волн в азоте составляет примерно ${}^5/_4$ от того, что имело бы место в присутствии только обычной вязкости и теплопроводности; для аммиака относительное возрастание составляет ${}^5/_3$, для водорода наблюдается возрастание в 20 раз, а для таких газов, как CO_2 — еще больше». Таким образом модель вращающихся молекул для некоторых вопросов кинетической теории газов представляет определенный интерес.

Проведенное нами исследование [2, 3] модели Бриана в рамках элементарной теории удара позволяет утверждать, что выполнение условия изменения знака относительной скорости точек соприкосновения тел при ударе не может быть обеспечено введением трения скольжения, а обеспечивается особым характером развития деформаций тел вблизи их начальной точки соприкосновения. Последнее обстоятельство может служить основанием для введения новой модели вращающихся молекул. В основе этой модели лежит предположение, что ударные импульсы распределены по малой площадке вблизи начальной точки соприкосновения тел при ударе и по этой причине они приводятся в этой точке не только к главному вектору ударных импульсов, но и к их главному моменту. Дадим краткое изложение теории удара однородных шаров с учетом главных моментов ударных импульсов.

Уравнения теории удара вращающихся шаров будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&m_1(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1)=\mathbf{S}, \qquad I_1(\boldsymbol{\omega}_1'-\boldsymbol{\omega}_1)=-a_1\mathbf{k}\times\mathbf{S}+\mathbf{L}_3\\
&m_2(\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2)=-\mathbf{S}, \qquad I_2(\boldsymbol{\omega}_2'-\boldsymbol{\omega}_2)=-a_2\mathbf{k}\times\mathbf{S}-\mathbf{L}_s
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где m_1 и m_2 – масса шаров, I_1 и I_2 – их осевые центральные моменты инерции, a_1 и a_2 – радиусы, $\mathbf{k}$ – единичный вектор направления от центра второго шара к центру первого, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{L}_s$ – главный вектор и главный момент ударных импульсов.

Для векторов скоростей точек соприкосновения шаров перед их ударом будем иметь

$$
\mathbf{V}_1=\mathbf{v}_1-\boldsymbol{\omega}_1\times a_1\mathbf{k}, \qquad \mathbf{V}_2=\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\omega}_2\times a_2\mathbf{k}
\tag{2}
$$

Скорости же этих точек после удара будут представляться теми же формулами, но все буквы будут снабжены штрихами вверху.

В явлении удара, как известно, различают две фазы: в первой из них происходит потеря скоростей, сопровождаемая развитием локальных деформаций вблизи начальной точки их соприкасания, а во второй – происходит восстановление, частичное или полное, деформированных частей соударяющихся тел, сопровождаемое развитием скоростей этих тел. В элементарной теории удара, излагаемой в курсах теоретической механики, момент ударных импульсов не вводится и принимается, что главный вектор ударных импульсов направлен по общей нормали соударяющихся выпуклых тел. По этой причине было достаточно ввести один коэффициент восстановления проекции относительных скоростей точек соприкосновения тел на их общую нормаль

$$
\frac{V_{1n}'-V_{2n}'}{V_{1n}-V_{2n}}=-k_n
\tag{3}
$$

Чтобы учесть явление шероховатости, потребуется ввести еще два коэффициента восстановления проекций относительных скоростей точек соприкосновения тел на какие-либо две касательные линии, проведенные в общей касательной плоскости

$$
\frac{V_{1\xi}'-V_{2\xi}'}{V_{1\xi}-V_{2\xi}}=-k_\xi, \qquad \frac{V_{1\eta}'-V_{2\eta}'}{V_{1\eta}-V_{2\eta}}=-k_\eta
\tag{4}
$$

При введении момента ударных импульсов $\mathbf{L}_s$ необходимы еще дополнительные коэффициенты восстановления проекций векторов угловых скоростей вращения. Рассмотрим простейший случай столкновения легко деформируемого вращающегося шара с неподвижной и недеформируемой плоскостями, когда векторы угловой скорости вращения и поступательной скорости шара перпендикулярны к плоскости. В этом случае легко уяснить, что в первой фазе явления удара будет происходить закручивание некоторой части поверхности шара; предварительное вращение ее элементов вблизи начальной точки соприкосновения мгновенно будет приостановлено действием касательных ударных импульсов, а элементы удаленных частей этой поверхности будут некоторое время продолжать свое вращение. В результате такого прокручивания поверхности шара в первой фазе явления удара произойдет накопление потенциальной энергии кручения, которая во второй фазе явления удара будет переходить в кинетическую энергию вращения и при этом знак угловой скорости вращения будет меняться на обратный. Опираясь на такого рода представления о развитии явления удара легко деформируемых тел, имеющих перед ударом угловые скорости вращения, можно ввести еще три коэффициента восстановления проекций разностей векторов угловых скоростей вращения на те же оси n, ξ и η

$$
\frac{\omega_{1n}'-\omega_{2n}'}{\omega_{1n}-\omega_{2n}}=-\varkappa_n, \qquad \frac{\omega_{1\xi}'-\omega_{2\xi}'}{\omega_{1\xi}-\omega_{2\xi}}=-\varkappa_\xi, \qquad \frac{\omega_{1\eta}'-\omega_{2\eta}'}{\omega_{1\eta}-\omega_{2\eta}}=-\varkappa_\eta
\tag{5}
$$

Если все коэффициенты восстановления, введенные равенствами (3) – (5), равны единице, то такие поверхности соударяющихся тел мы назовем абсолютно гибкими. В этом случае уравнения (1) удара вращающихся шаров могут быть легко разрешены

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{S}}{m_1}, \qquad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{S}}{m_2}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1' = \frac{1}{I_1+I_2}\left[(I_1-I_2)\boldsymbol{\omega}_1 + 2I_2\boldsymbol{\omega}_2 - (a_1+a_2)\mathbf{k}\times\mathbf{S}\right]$$

$$\boldsymbol{\omega}_2' = \frac{1}{I_1+I_2}\left[(I_2-I_1)\boldsymbol{\omega}_2 + 2I_1\boldsymbol{\omega}_1 - (a_1+a_2)\mathbf{k}\times\mathbf{S}\right]$$

$$\mathbf{L}_s = \frac{I_1I_2}{I_1+I_2}\left[-2(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2) + \frac{a_1I_2-a_2I_1}{I_1I_2}\mathbf{k}\times\mathbf{S}\right] \tag{6}$$

$$\mathbf{S} = -\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)(I_1+I_2)+m_1m_2(a_1+a_2)^2}\left\{(I_1+I_2)(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{m_1m_2(a_1+a_2)^2}{m_1+m_2}\left[(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{k}\right]\mathbf{k} - (a_1+a_2)(I_1\boldsymbol{\omega}_1+I_2\boldsymbol{\omega}_2)\times\mathbf{k}\right\}$$

Используя равенства (6), можно показать, что в случае соударения шаров абсолютно гибкими поверхностями сумма кинетических энергий этих шаров сохраняется, но происходит взаимное преобразование частей кинетических энергий от поступательных движений шаров в некоторые части кинетических энергий от их вращательных движений. На основании равенств (6) легко доказывается закон сохранения элемента объема 12-мерного пространства скоростей при столкновении шаров. А эти два обстоятельства, как известно, необходимы для составления интегродифференциального уравнения Больцмана в кинетической теории газов. Таким образом, модель шаров с абсолютно гибкими поверхностями может быть введена в кинетическую теорию газов наряду с моделью Бриана, в которой поверхности вращающихся шаров предполагаются абсолютно упругими и абсолютно шероховатыми.

В работе [4] было проведено решение уравнения Больцмана для модели шаров с абсолютно гибкими поверхностями по методу Чепмена — Энскога и получены формулы для коэффициентов обычной и объемной вязкостей; структура формул оказалась проще, чем для модели Бриана, но численные значения этих коэффициентов мало отличаются от тех значений, которые были получены для модели Бриана.

Поступила 24 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. *Слезкин Н. А.* О безударном контакте абсолютно упругошероховатых шаров. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 5.
3. *Слезкин Н. А.* Теория удара шероховатых шаров. Вестн. МГУ, Секция матем. и механ., 1971, № 1.
4. *Коротков М. П.* Определение коэффициента теплопроводности и вязкости газа на основе модели абсолютно гибких вращающихся шаров. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.