

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
3. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.

УДК 532.516.5.011+518.5

**РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ  
ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕНСИВНОГО ВДУВА СО СТЕНОК**

В. И. ЗИНЧЕНКО, О. П. ФЕДОРОВА

(Томск)

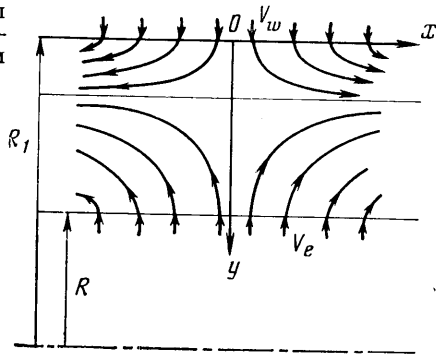
Рассматривается течение вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости в образованном двумя коаксиальными цилиндрами кольцевом канале при наличии интенсивного вдува со стенок. Асимптотическое решение, показывающее влияние осесимметричности канала, найдено в окрестности оси  $y$  и сравнивается с результатами точных численных расчетов.

Ранее асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса для течения в плоском канале при вдувах различной интенсивности со стенок было получено для несжимаемого газа в [1, 2], а для сжимаемого газа в [3].

1. Будем отыскивать решение системы уравнений Навье — Стокса для случая осесимметричного течения (фиг. 1) в окрестности оси симметрии  $y$  в виде [3]

$$\begin{aligned}
 u^* &= V_e u(\eta) \xi, & v^* &= -V_e v(\eta) \\
 h &= h_e^* \left[ \theta_0(\eta) - \frac{\theta_2(\eta)}{2} \xi^2 \right] \\
 (1.1) \quad P^* &= \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho_{e0}^* h_e^* \left[ P_0(\eta) - \frac{P_2(\eta)}{2} \xi^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{x}{R_1 - R}, \quad \eta = \frac{y}{R_1 - R}$$



Фиг. 1

$$\mu^* = \mu_e^* \mu(\theta_0), \quad \rho^* = \rho_{e0}^* \rho(\eta), \quad \rho_{e0}^* = \rho^*(0, R_1 - R)$$

Тогда для определения искомых безразмерных функций получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий

$$(1.2) \quad (1-\eta\delta) \rho u = [(1-\eta\delta) \rho v]'$$

$$(1.3) \quad \frac{\varepsilon^2}{(1-\eta\delta)} [(1-\eta\delta) \mu u']' + \rho v u' - \rho u^2 = K$$

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad \varepsilon^2 \left\{ \frac{4}{3} (\mu v')' + \frac{2}{3} (\mu u)' - \mu u' + \frac{2}{3} \delta \left( \frac{\mu v}{1-\eta\delta} \right)' - 2\delta \mu \left( \frac{v}{1-\eta\delta} \right)' \right\} + \\
 + \rho v v' = - \frac{h_e^*}{V_e^2} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} P_0'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad \frac{\varepsilon^2}{Pr(1-\eta\delta)} [(1-\eta\delta) \mu \theta_0']' + \rho v \theta_0' = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} v P_0' + \varepsilon^2 \mu \left\{ \frac{\theta_2}{Pr} - \right. \\
 \left. - \frac{4}{3} \frac{V_e^2}{h_e^*} \left[ u^2 + v'^2 + u v' + \frac{\delta v}{(1-\eta\delta)} (v' - u) + \frac{\delta^2 v^2}{(1-\eta\delta)^2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \frac{\varepsilon^2}{\text{Pr}(1-\eta\delta)} [(1-\eta\delta)\mu\theta_2']' + \rho v\theta_2' - 2\rho u\theta_2 = 2 \frac{V_e^2}{h_e^*} [ku + \varepsilon^2\mu u'^2]$$

$$(1.7) \quad P_0 = \rho\theta_0, \quad P_2 = -k \frac{V_e^2}{h_e^*} \frac{\gamma}{(\gamma-1)} = \text{const}$$

$$(1.8) \quad u=0, \quad v=-V_w/V_e=-v_w, \quad \theta_0=\theta_w, \quad \theta_2=0 \quad (\eta=0)$$

$$(1.9) \quad u=0, \quad v=1, \quad P_0=1, \quad \theta_0=1, \quad \theta_2=0 \quad (\eta=1)$$

$$\varepsilon^2 = \text{Re}^{-1}, \quad \text{Re} = \rho_{e0}^* V_e (R_1 - R) / \mu_e^*, \quad \delta = (R_1 - R) / R_1$$

Здесь звездочкой обозначены размерные величины, для которых использовались общепринятые обозначения, а числа  $\gamma$  и  $\text{Pr}$  предполагались постоянными.

Следует отметить, что для ряда практически важных случаев безразмерный параметр  $h_e^*/V_e^2$  велик. Поэтому при условии  $h_e^*/V_e^2 \gg 1$  имеем из (1.4)  $P_0' = 0$ , уравнение (1.6) имеет тривиальное решение  $\theta_2 = 0$ , а уравнение (1.5) переписывается в виде

$$(1.10) \quad \frac{\varepsilon^2}{\text{Pr}(1-\eta\delta)} [(1-\eta\delta)\mu\theta_0']' + \rho v\theta_0' = 0$$

Таким образом для определения характеристик течения в данном случае необходимо решать систему уравнений (1.2), (1.3), (1.7), (1.10) с соответствующими граничными условиями (1.8), (1.9).

2. При решении данной двухточечной краевой задачи будем определять величину теплового потока на поверхности внешнего цилиндра, величину трения, положение линии растекания и продольный градиент давления. Используя ступенчатую зависимость плотности и коэффициента вязкости от координаты  $\eta$

$$(2.1) \quad \rho = \rho_w = \frac{1}{\theta_w}, \quad \mu = \mu_w \quad (0 \leq \eta < \eta_0); \quad \rho = 1, \quad \mu = 1 \quad (\eta_0 < \eta \leq 1)$$

где  $\eta_0$  определяет положение точки растекания, для которой  $v(\eta_0) = 0$ , будем применять метод внешнего и внутреннего разложений для решения динамической части задачи (1.2), (1.3).

Вводя для области течения вблизи  $\eta = 0$  переменные

$$u(1-\eta\delta) = H'v_w, \quad v(1-\eta\delta) = H v_w, \quad \varepsilon_0^2 = \varepsilon^2 \mu_w / \rho_w v_w, \quad Q = k/v_w^2 \rho_w$$

преобразуем уравнения (1.2), (1.3) и граничные условия к виду

$$(2.2) \quad \varepsilon_0^2 [(1-\eta\delta)^2 H''' + \delta(1-\eta\delta) H'' + \delta^2 H'] + H H'' (1+\eta\delta) + \delta H H' - (1-\eta\delta) H'^2 = Q(1-\eta\delta)$$

$$(2.3) \quad H' = 0, \quad H = -1 \quad (\eta = 0); \quad H = 0 \quad (\eta = \eta_0)$$

При  $\varepsilon_0^2 \rightarrow 0$  решение (2.2) ищем в виде

$$H = H_0 + \varepsilon_0^2 H_1 + \dots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon_0^2 Q_1 + \dots$$

причем, поскольку найти аналитическое решение уравнения для  $H_0$  не удается, для случая малых значений  $\delta$  используем следующие разложения:

$$H_0 = H_{00} + \delta H_{01} + \delta^2 H_{02} + \dots, \quad Q_0 = Q_{00} + \delta Q_{01} + \delta^2 Q_{02} + \dots$$

После подстановки указанных разложений в уравнение для  $H_0$  получим систему уравнений

$$(2.4) \quad H_{00} H_{00}'' - H_{00}'^2 = Q_{00}$$

$$(2.5) \quad H_{01} H_{01}'' - 2H_{01}' H_{00}' + H_{01} H_{00}'' = Q_{01} - 2\eta Q_{00} - H_{00} H_{00}'$$

$$(2.6) \quad H_{00}(0) = -1, \quad H_{0i}(0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots), \quad H_{0i}'(0) = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots) \\ H_{0i}(\eta_0) = 0 \quad (i=0, 1, \dots)$$

Решая уравнения (2.4) и (2.5) с соответствующими граничными условиями и ограничиваясь двумя членами разложений по  $\delta$ , можно записать для  $H_0$  и  $Q_0$

$$(2.7) \quad H_0 = \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\eta}{\eta_0} - 1 \right) \right] - \delta \frac{\pi}{4} \eta \left( \frac{\eta}{\eta_0} - 1 \right) \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\eta}{\eta_0} - 1 \right) \right]$$

$$Q_0 = -\frac{\pi^2}{4\eta_0} \left( \frac{1}{\eta_0} + \delta \right)$$

Из полученного асимптотического решения с учетом первых членов разложения по  $\varepsilon_0^2$  получаем выражения для безразмерного трения и продольного градиента

давления

$$(2.8) \quad u'(0) = v_w H''(0) = \frac{h_e^*}{V_e^2} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{P_2}{v_w \rho_w}$$

$$\frac{h_e^*}{V_e^2} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} P_2 = \rho_w v_w^2 \frac{\pi^2}{4\eta_0} \left( \frac{1}{\eta_0} + \delta \right) + \dots$$

Используя для области течения вблизи  $\eta=1$  переменные

$$u(1-\eta\delta) = H_1'(1-\delta), \quad v(1-\eta\delta) = H_1(1-\delta), \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon^2/(1-\delta), \quad Q_1 = k(1-\delta)^{-2}$$

и применяя изложенный выше метод решения, получаем

$$(2.9) \quad H_1 = \sin \left[ \frac{\pi}{2} \frac{(\eta-\eta_0)}{(1-\eta_0)} \right] + \delta \frac{\pi}{4} \frac{(\eta-\eta_0)(1-\eta)}{(1-\eta_0)} \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{(\eta-\eta_0)}{(1-\eta_0)} \right]$$

$$Q_1 = - \frac{\pi^2}{4(1-\eta_0)^2} [1 + \delta(1 + \eta_0)]$$

Отсюда определяется величина продольного градиента давления

$$(2.10) \quad \frac{h_e^*}{V_e^2} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} P_2 = (1-\delta)^2 \frac{\pi^2}{4(1-\eta_0)^2} [1 + \delta(1 + \eta_0) + \dots]$$

Приравнявая (2.8) и (2.10), получим уравнение для нахождения координаты  $\eta_0$ , решение которого имеет вид

$$(2.11) \quad \eta_0 = \frac{v_w \rho_w^{0.5} (1-\delta)^{-1}}{1 + v_w \rho_w^{0.5} (1-\delta)^{-1}} \left\{ 1 - \frac{\delta}{2[1 + v_w \rho_w^{0.5} (1-\delta)^{-1}] + \dots} \right\}$$

Используя общее решение уравнения (1.10), можно записать для теплового потока

$$(2.12) \quad \theta_0'(0) = (1-\theta_w) \exp \left[ \frac{\text{Pr}}{\varepsilon_0^2} \int_0^{\eta_0} (1-\eta\delta)^{-1} H \, d\eta \right] \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\eta_0} (1-\eta\delta)^{-1} \exp \left[ - \frac{\text{Pr}}{\varepsilon_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} (1-\eta\delta)^{-1} H \, d\eta \right] d\eta + \right.$$

$$\left. + \mu_w \int_{\eta_0}^1 (1-\eta\delta)^{-1} \exp \left[ - \frac{\text{Pr}}{\varepsilon_1^2} \int_{\eta_0}^{\eta} (1-\eta\delta)^{-1} H_1 \, d\eta \right] d\eta \right\}^{-1}$$

Подставляя асимптотические выражения для  $H$  и  $H_1$ , преобразуем формулу (2.12) к виду

$$(2.13) \quad \theta_0'(0) = \frac{\pi}{2} (1-\theta_w) [\eta_0 I_0 + \mu_w (1-\eta_0) I_1]^{-1} \times$$

$$\times \exp \left[ - \frac{\text{Pr}}{\varepsilon_0^2} \frac{2\eta_0}{\pi} \left( 1 + \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \eta_0 \delta \right) \right]$$

$$I_i = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 + \delta \eta_0 + \frac{2\delta}{\pi} A_i z \right] \exp \left\{ - \frac{\text{Pr}}{\varepsilon_i^2} \frac{2B_i}{\pi} (1 + \delta \eta_0) (1 - \cos z) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\delta}{\pi} A_i (\sin z - z \cos z) + \frac{\delta}{2} A_i \left( z \sin z + \cos z - 1 + \frac{4}{\pi} \sin z - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2z^2}{\pi} \sin z - \frac{4z}{\pi} \cos z \right) \right\} dz \quad (i=0, 1)$$

$$A_0 = -B_0 = -\eta_0, \quad A_1 = B_1 = 1 - \eta_0$$

При малых значениях  $\varepsilon_0^2$ ,  $\varepsilon_1^2$  можно упростить выражения для  $I_i$ , воспользовавшись разложением тригонометрических функций в окрестности  $z=0$

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{[\text{Pr} B_i (1 + \delta c_i / 2)]^{0.5}} \left\{ \frac{\pi}{2} (1 + \delta \eta_0) \text{erf}(\tau_i) + \frac{\varepsilon_i \delta A_i [1 - \exp(-\tau_i^2)]}{[\text{Pr} B_i (1 + \delta c_i / 2)]^{0.5}} \right\}$$

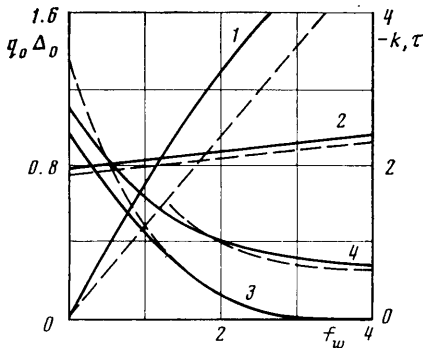
$$\tau_i = 0.5 \left[ \frac{\pi \text{Pr} B_i}{\varepsilon_i^2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} c_i \right) \right]^{0.5} \quad (i=0, 1), \quad c_0 = \eta_0, \quad c_1 = 1 + \eta_0$$

Интересно отметить, что при  $v_w=0$  и  $\varepsilon \ll 1$  формула для теплового потока принимает следующий вид:

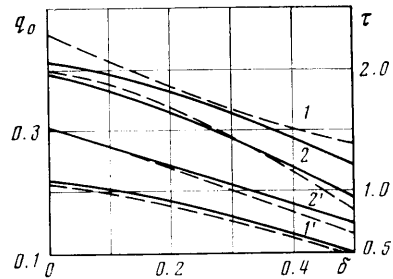
$$(2.14) \quad \theta_0'(0) = \frac{\pi(1-\theta_w) \text{Pr}[(1-\delta)(1+\delta/2)]^{0.5}}{\mu_w \varepsilon \{ \pi \text{Pr}^{0.5} + 2\varepsilon \delta [(1-\delta)(1+\delta/2)]^{-0.5} \}}$$

Нетрудно видеть, что полученные выше выражения для  $u'(0)$ ,  $P_2$ ,  $\eta_0$ ,  $\theta_0'(0)$  допускают предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$  к соответствующим выражениям, полученным в [3] для случая течения газа в плоском канале.

3. Численное интегрирование краевой задачи (1.2)–(1.9) проводилось с помощью итерационно-интерполяционного метода [4]. Задаваясь рядом значений  $k$ , счет про-



Фиг. 2



Фиг. 3

водился при помощи итераций до достижения необходимой точности, при этом шаг по  $\eta$ , выбирался постоянным и равным 0.01 либо 0.005. При значениях параметра  $h_e^*/V_e^2 > 10^3$  решение исходной краевой задачи совпадало с решением системы уравнений (1.2), (1.3), (1.7), (1.10) с граничными условиями (1.8), (1.9). Для различных чисел  $\text{Re}$  при  $\text{Pr}=0.7$ ,  $\mu = \sqrt{\theta_0}$  прослеживалась зависимость искомых характеристик от параметра вдува  $(\rho v)_w$  и величины  $\delta$ .

На фиг. 2 сплошными линиями 1–4 представлены результаты численных расчетов  $\Delta_0 = \eta_0 \varepsilon^{-1}$ ,  $h_e^*(\gamma-1)P_2/V_e^2 \gamma$ ,  $q_0 = \varepsilon \theta_0'(0)$ ,  $\tau = \varepsilon u'(0)$  соответственно в зависимости от параметра вдува  $f_w = (\rho v)_w \varepsilon^{-1}$  для  $\text{Re}=500$ ,  $\delta=0.2$ ,  $\theta_w=0.2$ . Пунктирные кривые соответствуют значениям указанных выше величин, подсчитанных по асимптотическим формулам (2.11), (2.10), (2.13), (2.8). В соответствии с результатами [3, 5] при  $f_w \geq 1.5$  для  $q_0$  и  $\tau$ , наблюдается хорошее согласование численного и аналитического решений, хотя величина  $\eta_0$  определяется из асимптотического решения с точностью до 15–20%.

На фиг. 3 показано влияние изменения параметра  $\delta$ , характеризующего степень осесимметричности течения, на тепловой поток и напряжение трения при  $\text{Re}=700$ ,  $\theta_w=0.2$ . Кривым 1, 1' соответствуют значения  $q_0$  при  $f_w=1.2, 1.72$ , кривые 2, 2' получены при данных вдувах для  $\tau = \varepsilon u'(0)$ . Видно что увеличение  $\delta$  сопровождается уменьшением величины теплового потока и снижением величины напряжения трения, причем результаты численного и аналитического решений при  $f_w \geq 1.5$  хорошо согласуются для широкого диапазона значений параметра  $\delta$ .

Интересно отметить, что при  $\mu=1$ ,  $v_w=0$  для чисел  $50 \leq \text{Re} \leq 1000$   $\theta_0'(0)$ , найденные численно, а также из (2.14), отличаются не более чем на 4–5% для  $0 \leq \delta \leq 0.4$ .

Поступила 8 VII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, № 9.
2. Shrestha G. M., Terrill R. M. Laminar flow with large injection through parallel and uniformly porous walls of different permeability. Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1968, vol. 21, pt 4.

3. Данилин Г. А. Асимптотическое решение уравнений Навье – Стокса для течения сжимаемой жидкости в плоском канале при интенсивном вдуве со стенок. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
4. Гришин А. М., Берцун В. Н. Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.
5. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.

УДК 532.526

### ИЗМЕРЕНИЕ ПРОФИЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЦИАНА В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА МОДЕЛЯХ, РАЗРУШАЕМЫХ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

Э. Б. ГЕОРГ, М. И. ЯКУШИН

(Москва)

В экспериментах на моделях, изготовленных из высокотемпературных материалов, которые помещались в нагретую до 8500° К воздушную струю, получено распределение концентрации радикала CN поперек пограничного слоя. Концентрация рассчитывалась по измеренной абсолютной интенсивности излучения вращательных линий CN с учетом профиля температур, полученного в работе [1]. Для нагрева воздуха использовался высокочастотный безэлектродный разряд.

Экспериментальная установка, безэлектродный высокочастотный плазматрон, на которой проводились исследования, подробно описана в [2]. Температура нагретого воздуха в рабочем сечении  $T=8500^\circ\text{К}$ , электронная концентрация  $N_e=3\cdot 10^{15}\text{ см}^{-3}$ , скорость потока  $v=30\text{ м/сек}$ , давление  $P=1\text{ кг/см}^2$ , диаметр струи 37 мм, суммарный тепловой поток к разрушаемой модели  $0.4\text{ квт/см}^2$  (конвективная часть  $0.3\text{ квт/см}^2$ , лучистая  $0.1\text{ квт/см}^2$ ). Рабочие газы — воздух и азот.

Исследовались модели из композитного пластика, которые имели плоскую форму с цилиндрической головной частью. Выбранная форма позволила получить в пограничном слое условия, близкие к одномерным вдоль линии наблюдения. Применялись модели длиной 3.3 см, шириной 3 см, с радиусом головной части 1.5 см. Они крепились в водоохлаждаемой державке, установленной на двухкомпонентном координатнике, который вводился в рабочее сечение струи, расположенное на высоте 10–15 мм от среза трубки.

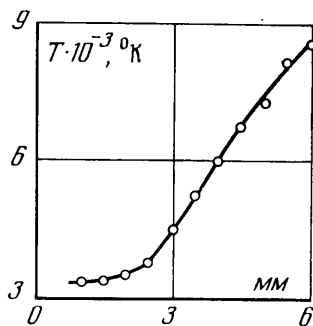
Спектральные измерения проводились на дифракционном спектрографе ДФС-13 с плоской решеткой 1200 штр/мм дисперсией 2 А/мм и рабочим диапазоном 2000–10000 А. Построение оптической системы и методика измерений описаны в [3]. Применение спектрографа ДФС-13 позволило получить спектры CN с разрешенной вращательной структурой.

В работе [4] измерены вращательная и колебательная температуры радикала CN, которые совпали в пределах точности эксперимента. На фиг. 1 дан измеренный профиль температуры поперек пограничного слоя. Для расчета концентрации CN измерялось распределение абсолютной интенсивности во вращательной структуре фиолетовой полосы CN (переход 0–1).

Интенсивности могут служить критерием концентрации радикалов CN в том случае, когда имеется уверенность, что возбуждение полностью обусловлено термическим механизмом. Интенсивность излучения отдельной вращательной линии при электронном переходе  $B\rightarrow X$  в единичный телесный угол из слоя длиной  $l$  определяется выражением

$$(1) \quad I = \frac{1}{4\pi} h\nu_{BX} N_{Bv'K'} A_{Xv''K'}^{Bv'K'} l$$

Здесь  $\nu_{BX}$  — частота электронного перехода,  $N_{Bv'K'}$  — заселенность верхнего электронного колебательно-вращательного состояния,  $A_{Xv''K'}^{Bv'K'}$  — вероятность электронного



Фиг. 1