

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЕТВЛЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ
КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЦИЛИНДРАМИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ
ВОЛНОВЫХ ЧИСЛАХ**

А. Л. УРИНЦЕВ

(Ростов-на-Дону)

В широком диапазоне изменения волновых чисел исследован характер потери устойчивости кругового течения Куэтта при переходе числа Рейнольдса R через критическое значение R_0 . Используется метод Ляпунова — Шмидта [1, 2], возникающие при его реализации краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений решаются на ЭВМ численно. Показано, что характер ветвления существенно зависит от волнового числа α . Для всех α , исключая некоторый интервал (α_1, α_2) , имеет место обычное закритическое ветвление: при малой надкритичности круговое течение теряет устойчивость и «мягко» возбуждается вторичное стационарное течение — устойчивые вихри Тейлора. Для волновых чисел из интервала (α_1, α_2) имеет место жесткое возбуждение вихрей Тейлора: при малой докритичности $R=R_0-\epsilon^2$ вторичный режим неустойчив и сливается с течением Куэтта при $\epsilon \rightarrow 0$, при малой же надкритичности в окрестности неустойчивого кругового течения не существует отличных от него стационарных режимов.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ и вязкости ν заполняет пространство между двумя соосными цилиндрами радиусов r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). Внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью Ω_1 , внешний — неподвижен. Принимая за единицы длины, времени и массы величины $r_2 - r_1$, $(r_2 - r_1)^2/\nu$, $(r_2 - r_1)^3\rho$ и вводя безразмерные параметры $R = \Omega_1 r_1 (r_2 - r_1) / \nu$ (число Рейнольдса) и $\xi = r_1 / (r_2 - r_1)$, запишем, используя уравнения гидродинамики в форме Громеко — Лэмба, нелинейные уравнения для возмущений

$$(1) \quad \begin{aligned} R(\Omega \times v + \omega \times V) + \text{grad } h + \text{rot } \omega &= \nu \times \omega \\ \text{rot } v &= \omega, \quad \text{div } v = 0 \end{aligned}$$

стационарного течения Куэтта с вектором скорости $RV = R(0, V_\theta, 0)$ ($V_\theta = \xi [(1 + \xi)^2 / r - r] / (1 + 2\xi)$) и вихрем $R\Omega = R(0, 0, \Omega_z)$ ($\Omega_z = -2\xi / (1 + 2\xi)$). Решение уравнений (1), имеющее по z период $2\pi/\alpha$, должно удовлетворять условию прилипания $v = 0$ ($r = \xi, 1 + \xi$) и иметь равный нулю поток скорости через поперечное сечение цилиндрической полости. Будем разыскивать такие вращательно-симметричные решения, для которых $v_r, v_\theta, h, \omega_z$ — четные, а $v_z, \omega_r, \omega_\theta$ — нечетные функции переменной z . Остальные решения можно получить из найденного при помощи сдвига $z \rightarrow z + \text{const}$ [2].

Полагая в (1)

$$(v, h, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k (v_k, h_k, \omega_k), \quad R = R_0 + \delta \epsilon^2$$

где ϵ — малый параметр, а величина δ , равная ± 1 , отвечает за знак приращения числа Рейнольдса, приходим к серии линейных задач

$$\begin{aligned} R_0(\Omega \times v_k + \omega_k \times V) + \text{grad } h_k + \text{rot } \omega_k &= f_k \\ \text{rot } v_k &= \omega_k, \quad \text{div } v_k = 0, \quad v_k = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \end{aligned}$$

решаемых последовательно. Здесь f_k — известные правые части, которые нетрудно выписать. При $k=1$ получаем линейную однородную задачу для вычисления критического числа Рейнольдса R_0 и собственной функции. Разыскивая решение в форме

$$\begin{aligned} v_1 &= \beta \Phi, \quad h_1 = \beta g(r) \cos \alpha z, \quad \omega_1 = \beta \Gamma \\ \Phi_r &= \varphi_r(r) \cos \alpha z, \quad \Phi_\theta = \varphi_\theta(r) \cos \alpha z, \quad \Phi_z = \varphi_z(r) \sin \alpha z \\ \Gamma_r &= \gamma_r(r) \sin \alpha z, \quad \Gamma_\theta = \gamma_\theta(r) \sin \alpha z, \quad \Gamma_z = \gamma_z(r) \cos \alpha z \end{aligned}$$

где $\beta > 0$ — неизвестная постоянная, приходим к системе

$$(2) \quad \begin{aligned} D\varphi_r &= -\varphi_r/r - \alpha\varphi_z, & D\varphi_\theta &= \gamma_z - \varphi_\theta/r \\ D\varphi_z &= -\gamma_\theta - \alpha\varphi_r, & Dg &= \alpha\gamma_\theta + R_0(\Omega_z\varphi_\theta + V_\theta\gamma_z) \\ D\gamma_\theta &= \alpha g - \gamma_\theta/r - R_0V_\theta\gamma_r, & D\gamma_z &= \alpha\gamma_r + R_0\Omega_z\varphi_r \\ D &= d/dr, & \gamma_r &= \alpha\varphi_\theta, & \varphi_r &= \varphi_\theta = \varphi_z = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \end{aligned}$$

для которой ставится задача отыскания ненулевого решения. В качестве нормировки удобно выбрать условие $\gamma_z = 1$ при $r = \xi$. Это позволяет интерпретировать величину $\epsilon\beta$ (при малых ϵ) как амплитуду колебаний касательного напряжения $p_{r\theta}$ на внутреннем цилиндре при перемещении вдоль образующей. Линейной однородной задаче соответствует сопряженная задача

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} + R_0 \mathbf{\Psi} \times \mathbf{\Omega} + \text{grad } Q &= 0, & \text{div } \mathbf{\Psi} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{\Psi} + R_0 \mathbf{V} \times \mathbf{\Psi} &= \mathbf{A}, & \mathbf{\Psi} &= 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \end{aligned}$$

которая после отделения переменной z

$$\begin{aligned} (\Psi_r, \Psi_\theta, Q, \Lambda_z) &= (\psi_r(r), \psi_\theta(r), q(r), \lambda_z(r)) \cos \alpha z \\ (\Psi_z, \Lambda_r, \Lambda_\theta) &= (\psi_z(r), \lambda_r(r), \lambda_\theta(r)) \sin \alpha z \end{aligned}$$

сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(3) \quad \begin{aligned} D\psi_r &= -\alpha\psi_z - \psi_r/r, & D\psi_\theta &= \lambda_z - \psi_\theta/r + R_0V_\theta\psi_r, & D\psi_z &= -\lambda_\theta - \alpha\psi_r \\ Dq &= \alpha\lambda_\theta - R_0\Omega_z\psi_\theta, & D\lambda_\theta &= \alpha q - \lambda_\theta/r \\ D\lambda_z &= \alpha\lambda_r - R_0\Omega_z\psi_r, & \lambda_r &= \alpha\psi_\theta + R_0V_\theta\psi_z \end{aligned}$$

с граничными условиями $\psi_r = \psi_\theta = \psi_z = 0$ ($r = \xi, 1 + \xi$) и дополнительным условием нормировки $\lambda_z = 1$ при $r = \xi$. Условие разрешимости неоднородной задачи, имеющее вид

$$(4) \quad \int_0^{2\pi/\alpha} \int_\xi^{1+\xi} (\mathbf{f}_k, \mathbf{\Psi}) r dr dz = 0 \quad (k=2, 3, 4, \dots)$$

при $k=2$ удовлетворяется автоматически. Разыскивая решение соответствующей задачи в форме

$$\begin{aligned} v_{2r} &= 0.5\beta^2 w_r(r) \cos 2\alpha z, & v_{2\theta} &= 0.5\beta^2 [W(r) + w_\theta(r) \cos 2\alpha z] \\ v_{2z} &= 0.5\beta^2 w_z(r) \sin 2\alpha z, & h_2 &= 0.5\beta^2 [H(r) + s(r) \cos 2\alpha z] \\ \omega_{2r} &= 0.5\beta^2 l_r(r) \sin 2\alpha z, & \omega_{2\theta} &= 0.5\beta^2 l_\theta(r) \sin 2\alpha z \\ \omega_{2z} &= 0.5\beta^2 [L(r) + l_z(r) \cos 2\alpha z] \end{aligned}$$

приходим к уравнениям

$$(5) \quad \begin{aligned} Dw_r &= -w_r/r - 2\alpha w_z, & Dw_\theta &= l_z - w_\theta/r, & Dw_z &= -l_\theta - 2\alpha w_r \\ Ds &= 2\alpha l_\theta + R_0(\Omega_z w_\theta + V_\theta l_z) + \varphi_\theta \gamma_z + \varphi_z \gamma_\theta \\ Dl_\theta &= 2\alpha s - l_\theta/r - R_0V_\theta l_r + \varphi_r \gamma_\theta - \varphi_\theta \gamma_r \\ Dl_z &= 2\alpha l_r + R_0\Omega_z w_r + \varphi_z \gamma_r + \varphi_r \gamma_z \\ l_r &= 2\alpha w_\theta, & w_r &= w_\theta = w_z = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \\ DW &= L - W/r, & DL &= \varphi_r \gamma_z - \varphi_z \gamma_r, & W &= 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \\ DH &= \varphi_\theta \gamma_z - \varphi_z \gamma_\theta + R_0(\Omega_z W + V_\theta L), & H &= 0 \quad (r = 1 + \xi) \end{aligned}$$

причем последнее условие фиксирует произвольную постоянную в определении полного давления. Множитель β находим, применяя условие разрешимости (4) при $k=3$

$$(6) \quad \beta = \sqrt{\delta I_1 / I_2}, \quad I_1 = \frac{1}{R_0} \int_\xi^{1+\xi} (\gamma_r \lambda_r + \gamma_\theta \lambda_\theta + \gamma_z \lambda_z) r dr, \quad I_2 = \frac{1}{4} \int_\xi^{1+\xi} \kappa(r) r dr$$

$$\begin{aligned} \kappa(r) &= w_r (\varphi_\theta \gamma_z + \varphi_z \gamma_\theta) - w_\theta (\psi_z \gamma_r + \psi_r \gamma_z) + w_z (\psi_r \gamma_\theta - \psi_\theta \gamma_r) + \\ &+ 2W (\psi_z \gamma_r - \psi_r \gamma_z) + l_r (\varphi_\theta \psi_z - \varphi_z \psi_\theta) + \\ &+ l_\theta (\varphi_z \psi_r - \varphi_r \psi_z) + (2L + l_z) (\varphi_r \psi_\theta - \varphi_\theta \psi_r) \end{aligned}$$

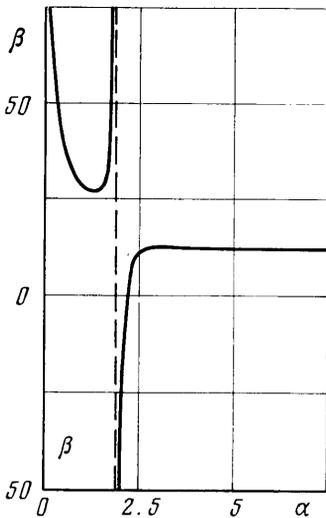
Знак δ выбирается так, чтобы обеспечить положительность подкоренного выражения ($\delta = \text{sign}(I_1/I_2)$). Если окажется, что $\delta = +1$, то вторичный режим отвечается

в закритическую область $R > R_0$; в случае $\delta = -1$ имеем дело с докритическим ветвлением ($R = R_0 - \varepsilon^2$). Для решения вопроса об устойчивости течения Куэтта и вторичного течения в классе возмущений периода $2\pi/\alpha$ по z составляем уравнения в вариациях и отделяем время посредством множителя $\exp(\sigma t)$ для кругового течения и множителя $\exp(\sigma' t)$ для вторичного (вихрей Тейлора). Затем применяем метод возмущений, пользуясь близостью величины R к критическому значению R_0 . В результате приходим к формулам

$$(7) \quad \sigma = \sigma_2(R - R_0) + o(|R - R_0|), \quad \sigma' = \sigma_2' \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad \sigma_2' = -2\delta\sigma_2$$

$$\sigma_2 = I_1/I_3, \quad I_3 = \int_{\xi}^{1+\xi} (\varphi_r \psi_r + \varphi_\theta \psi_\theta + \varphi_z \psi_z) r dr$$

из которых видно, что при $\sigma_2 > 0$ течение Куэтта, устойчивое при $R < R_0$, становится неустойчивым при $R > R_0$, а вторичный режим оказывается устойчивым в случае закритического ветвления ($\delta = +1$) и неустойчивым в случае докритического ветвления ($\delta = -1$).



Вычисления вихрей Тейлора были проведены для зазора $\xi = 1$ при различных значениях волнового числа α ($0.05 \leq \alpha \leq 8$) всего в 95 точках. Расчет проводился на ЭВМ ОДРА-1204 в два этапа. На первом этапе разыскивалось критическое число Рейнольдса, на втором — проводилось решение краевых задач (2), (3), (5) и вычислялись величины δ , β и σ_2 . Для отыскания $R_0(\alpha)$ был применен метод последовательных приближений [1], сходящийся в силу свойства осцилляционности [3] операторов линейной задачи к первому собственному числу. Обращение дифференциальных операторов проводилось путем сведения к нескольким задачам Коши, которые интегрировались численно. Для хранения в памяти ЭВМ последовательных приближений к собственному вектору была использована аппроксимация слайдами [4], обладающая хорошим качеством. Это позволило за 2—3 итерации получать критическое число Рейнольдса с высокой степенью точности. Для решения всех краевых задач применялся метод линейной комбинации частных решений в сочетании с методом Рунге — Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования. Вычисление интегралов I_1 , I_2 , I_3 было сведено к решению задачи Коши. Результаты расчетов приведены на фигуре и представлены ниже. Значения величин R_0 , β , σ_2' , полученные при точности интегрирования 10^{-7} :

α	R_0	β	σ_2'
0.45	268.12	42.209	-0.12450
1.4	97.300	27.027	-0.38460
1.84	81.126	43.004	-0.49942
1.94	78.764	51.997 *	+0.52455
2.0	77.512	26.437 *	+0.53941
2.16	74.699	6.8376 *	+0.57821
3.166	68.186	12.554	-0.78886
6.0	93.959	11.690	-1.1111

В точке $\alpha = 3.166$ функция $R_0(\alpha)$ достигает минимума. Значения постоянной β , отмеченные звездочкой, соответствуют докритическому ветвлению. Вычисления показали, что в интервале $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ ($\alpha_1 = 1.9077$, $\alpha_2 = 2.1996$) происходит ответвление неустойчивых вихрей Тейлора, существующих при числах Рейнольдса, меньших критического. Соответствующие положительные значения постоянной β отложены на фигуре для наглядности ниже линии $\beta = 0$. При $\alpha \rightarrow \alpha_1$ величина β неограниченно возрастает ($\beta \sim 9.83|\alpha - \alpha_1|^{-1/2}$), при $\alpha \rightarrow \alpha_2$ — стремится к нулю ($\beta \sim 31.9|\alpha - \alpha_2|^{1/2}$). В точке $\alpha = \alpha_2$ $R_0(\alpha) = R_0(2\alpha) = 74.1$, т. е. эта точка принадлежит исключительному счетному множеству волновых чисел, для которых нет простоты собственных значений [3]. Постоянная σ_2 оказалась положительной при всех значениях волнового числа, что свидетельствует о неустойчивости течения Куэтта в закритической области.

Поступила 29 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
3. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.

УДК 532.516.5.011+518.5

**РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ
ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕНСИВНОГО ВДУВА СО СТЕНОК**

В. И. ЗИНЧЕНКО, О. П. ФЕДОРОВА

(Томск)

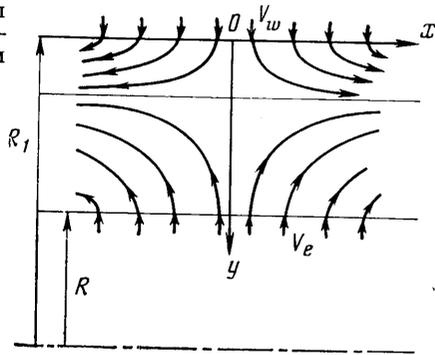
Рассматривается течение вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости в образованном двумя коаксиальными цилиндрами кольцевом канале при наличии интенсивного вдува со стенок. Асимптотическое решение, показывающее влияние осесимметричности канала, найдено в окрестности оси y и сравнивается с результатами точных численных расчетов.

Ранее асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса для течения в плоском канале при вдувах различной интенсивности со стенок было получено для несжимаемого газа в [1, 2], а для сжимаемого газа в [3].

1. Будем отыскивать решение системы уравнений Навье — Стокса для случая осесимметричного течения (фиг. 1) в окрестности оси симметрии y в виде [3]

$$\begin{aligned}
 u^* &= V_e u(\eta) \xi, & v^* &= -V_e v(\eta) \\
 h &= h_e^* \left[\theta_0(\eta) - \frac{\theta_2(\eta)}{2} \xi^2 \right] \\
 (1.1) \quad P^* &= \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho_{e0}^* h_e^* \left[P_0(\eta) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{P_2(\eta)}{2} \xi^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{x}{R_1 - R}, \quad \eta = \frac{y}{R_1 - R}$$



Фиг. 1

$$\mu^* = \mu_e^* \mu(\theta_0), \quad \rho^* = \rho_{e0}^* \rho(\eta), \quad \rho_{e0}^* = \rho^*(0, R_1 - R)$$

Тогда для определения искомых безразмерных функций получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий

$$(1.2) \quad (1-\eta\delta) \rho u = [(1-\eta\delta) \rho v]'$$

$$(1.3) \quad \frac{\varepsilon^2}{(1-\eta\delta)} [(1-\eta\delta) \mu u']' + \rho v u' - \rho u^2 = K$$

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad \varepsilon^2 \left\{ \frac{4}{3} (\mu v')' + \frac{2}{3} (\mu u)' - \mu u' + \frac{2}{3} \delta \left(\frac{\mu v}{1-\eta\delta} \right)' - 2\delta \mu \left(\frac{v}{1-\eta\delta} \right)' \right\} + \\
 + \rho v v' = - \frac{h_e^*}{V_e^2} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} P_0'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad \frac{\varepsilon^2}{Pr(1-\eta\delta)} [(1-\eta\delta) \mu \theta_0']' + \rho v \theta_0' = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} v P_0' + \varepsilon^2 \mu \left\{ \frac{\theta_2}{Pr} - \right. \\
 \left. - \frac{4}{3} \frac{V_e^2}{h_e^*} \left[u^2 + v'^2 + u v' + \frac{\delta v}{(1-\eta\delta)} (v' - u) + \frac{\delta^2 v^2}{(1-\eta\delta)^2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$