

**ЗАДАЧА О ПЛОСКОМ ВЗРЫВЕ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ
С УЧЕТОМ ПОСЛЕПРОРЫВНОЙ СТАДИИ**

Х. С. КЕСТЕНБОЙМ, З. Н. КУЗИНА, А. А. МАРКОВ

(Москва)

Рассматривается задача о плоском взрыве в экспоненциальной и стандартной атмосферах. Неоднородность среды оказывает весьма значительное влияние на течение газа. Как показано в работе [1], в условиях экспоненциальной атмосферы верхняя часть фронта ударной волны за конечное время уходит на бесконечное расстояние. Это явление получило название «прорыва» атмосферы. Численное исследование сильного плоского взрыва в экспоненциальной атмосфере на стадии до прорыва содержится в [2]. В [3] предложены асимптотические граничные условия, позволяющие рассчитывать течение газа после прорыва. В данной работе получено численное решение этой задачи на интервале времени, в 10–15 раз превышающем время прорыва. Изучено влияние противодействия и силы тяжести. Приведены некоторые результаты для плоского взрыва в стандартной атмосфере.

1. Задача о точечном взрыве в стратифицированной атмосфере рассматривалась рядом авторов с помощью приближенных и численных методов. Обзор этих работ имеется в книге [4].

В [5, 6] рассмотрено движение газа за распространяющимися вверх или вниз в экспоненциальной атмосфере сильными взрывными волнами в плоском движении. Построены автомодельные решения, которые описывают течение в окрестности скачков, ушедших от точки взрыва на большое расстояние.

Сильный плоский взрыв в экспоненциальной среде численно исследован в [2]. Прослежено взаимодействие «верха» и «низа» и переток энергии вверх. Рассмотрена предпрорывная стадия течения, когда наблюдается значительный разгон поднимающейся ударной волны. В окрестности верхнего фронта получен выход численного решения на автомодельный режим [5], близость к автомодельному решению [6] в окрестности нижнего фронта отмечалась в сравнительно узкой зоне ввиду ограниченности охваченного расчетом отрезка времени.

В [7, 8] исследовались особенности стремления решения задачи о плоском взрыве к автомодельным пределам [5, 6]. Построены асимптотические разложения газодинамических функций, включающие в себя автомодельные решения и учитывающие влияние начальных условий взрыва, противодействия и земного тяготения.

Взаимное влияние верхней и нижней областей течения при сильном плоском взрыве на этапе интенсивного разгона верхнего фронта и отчасти в послепрорывной стадии изучено в [3]. Предложен способ введения вспомогательной границы и граничных условий на ней, учитывающих асимптотику течения в верхней области.

В настоящей работе на основе явной разностной методики [4] с дополнениями [3] проведено численное исследование плоского взрыва в экспоненциальной и стандартной атмосфере. Изучено совместное влияние неоднородности атмосферы, противодействия (а также земного тяготения). От-

мечен промежуточный характер асимптотики решения в окрестности нижнего фронта. Расчеты охватывают значительный отрезок времени после прорыва и доведены до весьма сильного вырождения нижней ударной волны. В нижней области даже при заметном влиянии противодействия имеются качественные отличия по сравнению с задачей о взрыве в однородной среде (ср. [9]). В то же время в верхней области для взрыва с относительно небольшим энерговыделением наблюдаются профили, типичные для задачи о взрыве с учетом противодействия.

Отмечены некоторые особенности взрыва в стандартной атмосфере. Для высот взрыва 50, 80, 100 км прослежена эволюция ударных волн и получены распределения газодинамических величин.

2. В неоднородной по высоте x атмосфере происходит взрыв с энерговыделением E^0 в плоскости $x=0$. Образующиеся при этом ударные (взрывные) волны распространяются вверх ($x>0$) и вниз ($x<0$) по находящемуся в покое невязкому совершенному газу. Излучение и теплопроводность не учитываются, ускорение силы тяжести считается постоянным. Атмосферные плотность ρ_1 и давление p_1 являются некоторыми функциями переменной x

$$(2.1) \quad \rho_1 = \rho_{10} F_1(x), \quad p_1 = p_{10} F_2(x)$$

где ρ_{10}, p_{10} — значения параметров газа в точке взрыва ($F_1(0) = F_2(0) = 1$). В безразмерных переменных [2] система уравнений газовой динамики и соотношения Ренкина — Гююнио на поднимающейся $x = \varphi_+(t)$ и опускающейся $x = \varphi_-(t)$ ударных волнах принимают соответственно следующий вид:

$$(2.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_g = 0, \quad A_g = \frac{g \rho_{10} \Delta_0}{E}, \quad E = E^0 / \alpha^0$$

$$(2.3) \quad x = \varphi_{\pm}(t), \quad \rho = F_1(\varphi_{\pm}) \frac{(\gamma+1)p + (\gamma-1)A_p F_2(\varphi_{\pm})}{(\gamma+1)A_p F_2(\varphi_{\pm}) + (\gamma-1)p}$$

$$\varphi_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{(\gamma+1)p + (\gamma-1)A_p F_2(\varphi_{\pm})}{2F_1(\varphi_{\pm})}}, \quad p = \frac{F_1(\varphi_{\pm})}{4} \left[(\gamma+1)u^2 + \right.$$

$$\left. + 4A_p \frac{F_2(\varphi_{\pm})}{F_1(\varphi_{\pm})} \pm u \sqrt{(\gamma+1)^2 u^2 + 16\gamma A_p \frac{F_2(\varphi_{\pm})}{F_1(\varphi_{\pm})}} \right], \quad A_p = \frac{p_{10} \Delta_0}{E}$$

Здесь Δ_0 — характерный масштаб неоднородности атмосферы. Величины A_p и A_g характеризуют влияние противодействия и земного тяготения соответственно. Условие $A_p = 0$ ($F_1 \neq \text{const}$) отвечает задаче о сильном взрыве в неоднородной среде. В случае $A_p \neq 0, F_1 \neq \text{const}, F_2 \neq \text{const}$ имеем взрыв в атмосфере с переменными плотностью и давлением. Для экспоненциальной (барометрической) атмосферы

$$(2.4) \quad F_1(x) = F_2(x) = e^{-x}$$

Для расчетов сильного взрыва в стандартной атмосфере принимается следующая зависимость:

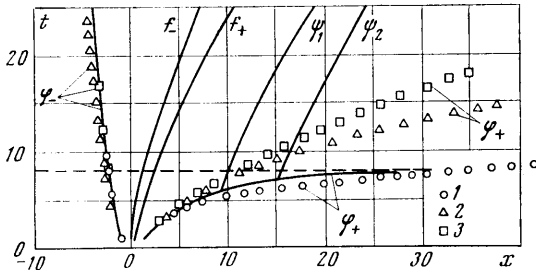
$$(2.5) \quad F_1(x) = \frac{1.225}{\rho_{10}} \Phi^{-1}(z), \quad \Phi = \sum_{i=0}^{11} A_i z^i \quad \text{при } z \leq 190$$

$$(2.6) \quad F_1(x) = \frac{1}{\rho_{10}} 10^{a(z-190)-b} \quad \text{при } 190 < z \leq 300$$

Здесь $z = x\Delta_0 + z_0$, z — высота над уровнем моря (км), ρ_{10} — плотность атмосферы в точке взрыва (кг/м^3), Δ_0 — масштаб неоднородности на высоте взрыва (км), z_0 — высота взрыва, $a = -0.00894$, $b = 9.357$. Аппроксимационная формула (2.5) приведена в [10], там же даны значения коэффициентов A_0, A_1, \dots, A_{11} . Значения плотности, вычисленные по формулам (2.5),

(2.6), отличаются от табличных данных стандартной атмосферы (см. [11]) не более чем на 5%.

Область, где ищется решение системы уравнений (2.2), изображена на фиг. 1. Сплошные кривые относятся к результатам расчета взрыва в экспоненциальной атмосфере, обозначения 1, 2, 3 — к данным исследования для стандартной атмосферы. Сни-



Фиг. 1

зу расчетная область ограничена опускающейся ударной волной $x = \varphi_-(t)$, сверху — в случае стандартной атмосферы, а также на предпрорывной стадии для экспоненциальной атмосферы — ударной волной $x = \varphi_+(t)$. При расширениях $\varphi_+ \geq 10$ вводится вспомогательная граница $x = \psi_1(t)$ (или $x = \psi_2(t)$, см. ниже).

В соответствии с методикой, подробно описанной в [4], вводится центральная область $G_0 (f_- \leq x \leq f_+)$, содержащая внутри себя лагранжеву точку энерговыделения. Границы центральной области $f_+(t)$ и $f_-(t)$ перемещаются в процессе расчета в соответствии с эволюцией горячей зоны (см. фиг. 1).

В областях стандартного счета $G_+(x \geq f_+)$ и $G_-(\varphi_- \leq x \leq f_-)$ уравнения (2.2) заменяются разностными соотношениями с помощью явной схемы второго порядка точности, скомбинированной с неявным стабилизирующим сглаживанием решения на промежуточном слое (см. [4]), к условиям Ренкина — Гюгонно присоединяется уравнение движения, записанное около фронта по разностной схеме.

Неоднородность атмосферы обуславливает качественную перестройку течения. С этим связано изменение методики расчета газодинамических функций в верхней области. Для нормированных величин $R_+ = \rho e^{\varphi_+}$, $P_+ = \rho e^{\varphi_+} / \varphi_+^2$, $V_+ = u / \varphi_+$ в окрестности поднимающейся волны φ_+ имеет место предельный переход: $\xi = \varphi_+ - x$ фиксировано, $\tau = \ln \varphi_+^2 \rightarrow \infty$

$$(2.7) \quad R_+ \rightarrow R_0(\xi), \quad P_+ \rightarrow P_0(\xi), \quad V_+ \rightarrow V_0(\xi), \quad \ddot{\varphi}_+ / \varphi_+^2 \rightarrow \omega_0$$

Здесь индекс 0 относится к автомодельному решению [5], $\omega_0 = 1/\alpha$, α — показатель автомодельности. Аналогичный предельный переход получается при фиксированном значении ξ и стремлении к бесконечности $\tau = \varphi_+$ (см. подробнее [7, 12]).

В плоскости переменных ξ, τ имеется линия $\xi = \xi_+(\tau)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $(V_+ - 1)^2 - \gamma P_+ / R_+ = 0$. При $\tau \rightarrow \infty$ координата $\xi_+ \rightarrow \xi_+^0$, где постоянная ξ_+^0 — координата особой точки автомодельного решения [5] в эйлеровой переменной. Линия $\xi = \xi_+(\tau)$ приближается при $\tau \rightarrow \infty$ к предельной характеристике $\xi = \xi_+'(\tau)$ семейства $d\tau/d\xi = V_+ - 1 - \sqrt{\gamma P_+ / R_+}$, которая отделяет область самораспространяющейся верхней волны от остального течения. Лишь возмущения, возникшие в области $0 \leq$

$\leq \xi \leq \xi_+'(\tau)$ смогут догнать волну φ_+ . В плоскости xt линии $\xi = \xi_+(\tau)$ соответствует линия $x = x_+(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$(2.8) \quad (u - \dot{\varphi}_+)^2 = \gamma p / \rho$$

Уравнение аналогичной линии $x = x_-(t)$ для нижнего скачка φ_- в случае $A_p = A_g = 0$, полученное на основе асимптотического исследования [8], имеет вид

$$(2.9) \quad (u - \dot{\varphi}_-)^2 = \gamma p / \rho$$

Для расчета течения в период интенсивного разгона верхнего фронта используется асимптотическая близость газодинамических функций к автомодельному решению [5]. В поле течения начиная с момента t^* , когда $\varphi_+(t^*) \geq 9 \div 10$, вводится вспомогательная граница сопряжения верхней и нижней областей $x = \psi(t)$. Эта граница располагается выше линии $x = x_-(t)$ таким образом, чтобы величина $\omega = \varphi_+ / \dot{\varphi}_+^2$ была достаточно близка к предельному значению ω_0 . На границе $x = \psi(t)$ ставятся асимптотические граничные условия (см. [3]) для плотности и давления, полученные из уравнений движения с помощью предельного перехода (2.7)

$$x = \psi(t), \quad t \geq t^*$$

(2.10)

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial x} - 1 \right) + (V - 1) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$p \left[(2\omega_0 - 1) + \gamma \frac{\partial V}{\partial x} \right] + (V - 1) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Здесь $V(x, t) = u(x, t) / \dot{\varphi}_+(t)$, величины ω_0 для ряда γ получены в [13]. Расчет в стадии разгона и после прорыва проводится в области $\varphi_-(t) \leq x \leq \psi(t)$, при этом $V(x, t)$ в формулах (2.10) находится на границе $x = \psi(t)$ следующим образом:

$$(2.11) \quad V(x, t) = \begin{cases} (T - t) \omega_0 u(x, t), & \text{если } t^* \leq t < T \\ 0, & \text{если } t \geq T \end{cases}$$

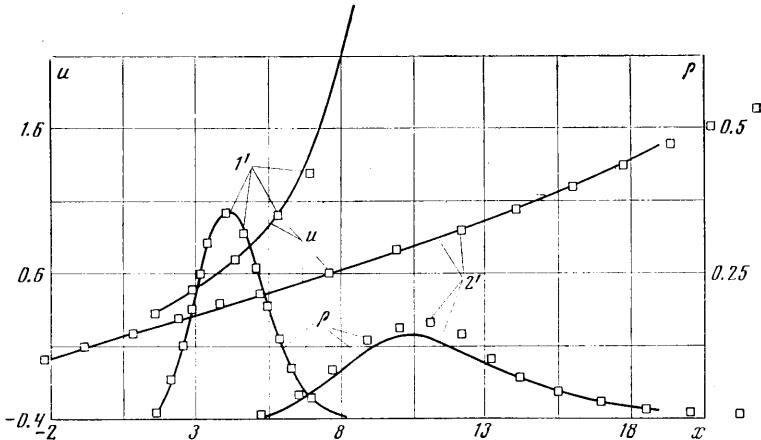
где $u(x, t)$ определяется из разностной аппроксимации уравнения движения, время прорыва T определяется из сшивки с результатами расчета допрорывной стадии.

Точность асимптотических краевых условий контролировалась методическими расчетами. Сопоставлены распределения величин в верхней области G_+ в момент $t_2 = 6.82$ при условии, что с момента $t_1 = 6.12$ расчет проводился как с использованием, так и без использования соотношений (2.10). Профили скорости и давления претерпевают заметную эволюцию за указанный промежуток времени. Данные расчета без асимптотических условий весьма близки к соответствующим результатам, полученным по модифицированной методике в области $0 < x < \psi(t_2)$.

Рассмотрены два варианта подключения замыкающей верхнюю область границы $\psi(t)$ с условиями (2.10). Первый вариант соответствует моменту подключения t_1^* , для которого $\varphi_+ = 9$, второй — моменту t_2^* , при котором $\varphi_+ = 15$ (см. фиг. 1). При сопоставлении данных расчета двух вариантов обнаружено полное совпадение профилей газодинамических величин в нижней области G_- . В верхней области наблюдается некоторая нерегулярность решения в окрестности ψ — границы в первом варианте. При большем удалении вспомогательной границы от горячей зоны (второй вариант) распределения величин гладко меняются там, где ранее отмечались осцилляции, и на области сравнения ($x \leq \psi_1(t)$, $t \geq t_2^*$) имеется хорошее совпадение профилей величин.

3. Рассмотрим основные характеристики взрыва в экспоненциальной среде на этапе интенсивного разгона верхнего фронта и в послепрорывной стадии. Общая картина эволюции областей, охваченных взрывом, изображена на фиг. 1 ($\gamma=1.4$); результаты, относящиеся к взрыву в экспоненциальной атмосфере, отмечены сплошными линиями. Хорошо видны всплытие горячей центральной области и интенсивный разгон верхнего фронта. Кривая $\varphi_+(t)$ асимптотически приближается к пунктирной прямой, соответствующей времени прорыва $T=7.78$.

На фиг. 2 для двух моментов времени $t \approx 6$ и $t \approx 15$ (кривые 1' и 2' соответственно) показаны распределения газодинамических величин в об-



Фиг. 2

ласти между распространяющимися вверх и вниз сильными ударными волнами. Видно, что со временем усиливается пространственная неоднородность течения (см. профили плотности). Распределение скорости приобретает линейный характер, увеличивается переток массы из нижней области в верхнюю.

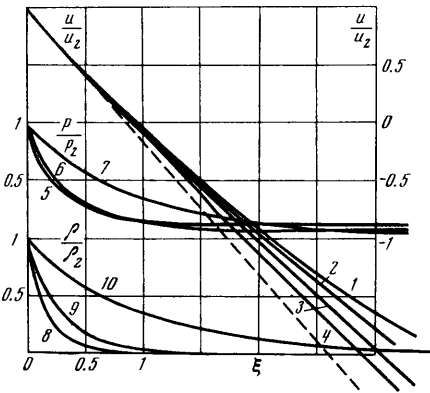
Отметим, что с течением времени давление в горячей зоне быстро падает, в чем проявляется влияние области G_+ . Граница $x=x_-(t)$ (см. формулу (2.9)) достаточно быстро движется вверх из-за подъема горячей зоны.

Расчет процесса на значительном отрезке времени после прорыва позволяет детально изучить эффекты противодействия. Влияние противодействия на распределение величин за опускающимся фронтом иллюстрируется на фиг. 3. Для значения параметра $A_p=0.001$ ($\gamma=1.25$, $A_g=0$) в моменты времени 11.23, 18.96, 63.82 построены графики функций p/p_2 (соответственно кривые 5–7) и ρ/ρ_2 (соответственно кривые 8–10) в зависимости от автомодельной переменной $\xi=x-\varphi_-$. Видно, что со временем профили давления и плотности деформируются, однако при этом, несмотря на затухание нижней волны, сохраняют черты, присущие распределениям задачи о сильном взрыве.

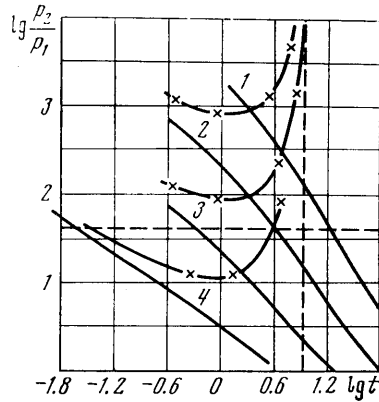
Изменение с течением времени интенсивности ударных волн, распространяющихся вверх и вниз в экспоненциальной атмосфере, показано для ряда значений параметра A_p на фиг. 4 (кривые 1–4 отвечают вариантам расчета, когда $A_p=0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$ соответственно).

Горизонтальная прямая соответствует перепаду $p_2/p_1=40$, принимаемому за условную границу сильной стадии взрыва. Видно, что интенсивность верхнего фронта (линии с крестиками) для всех A_p сначала умень-

шается, а затем в процессе разгона снова растет. При $A_p=0.01$ и меньше верхний фронт все время остается сильным. При $A_p=0.1$ график функции $p_2/p_1(t)$ уже заходит в область действия противодействия. В то же время опускающиеся ударные волны (сплошные кривые) постепенно вырождаются. Отметим, что при малых A_p , т. е. при достаточно больших энергиях взрыва, нижний скачок остается сильным долгое время после



Фиг. 3



Фиг. 4

прорыва (см. фиг. 4, где время прорыва отмечено вертикальной пунктирной прямой).

Учет противодействия приводит к увеличению скорости нижнего фронта (см. [14]). Интересно, что в данной задаче удается выделить фазу с преобладающим влиянием противодействия. Характерные профили обнаруживаются в верхней области в варианте с $A_p=0.5$ (см. фиг. 5, $\gamma=1.25$). В указанном случае поднимающаяся волна вырождается до минимального перепада $p_2/p_1=5.12$. При этом в профилях скорости u , плотности ρ_+ и давления p_+ (кривые 1-3 соответственно) ясно выражена волна разрежения, идущая сверху. Плотность слабо меняется вблизи фронта и резко уменьшается в окрестности центральной зоны (ср. [9]). В то же время профили плотности ρ_- и давления p_- (кривые 4, 5 соответственно) в нижней области напоминают распределения параметров в случае сильного взрыва, хотя перепад давления на нижнем фронте близок к единице.

Опишем особенности приближения решения к автомодельному [6] в нижней области. На фиг. 6 построена зависимость $\varphi_-(t)$ для $\gamma=1.25$. Пунктирная прямая соответствует [6] и определяется уравнением

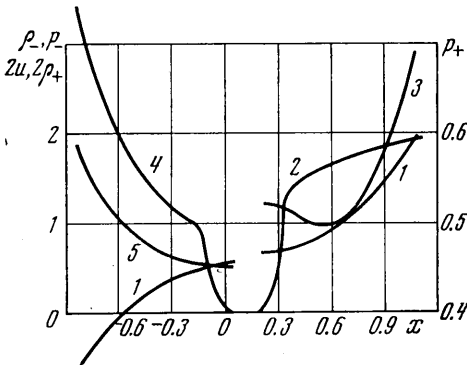
$$(3.1) \quad -\varphi_- = k \lg t + \text{const}, \quad k = \alpha \ln 10$$

(α — коэффициент автомодельности). Результаты расчетов нанесены сплошными линиями (кривые 1-6 соответствуют значениям параметра $A_p=0, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1$). Видно, что кривая с $A_p=0$ асимптотически приближается к прямой (3.1).

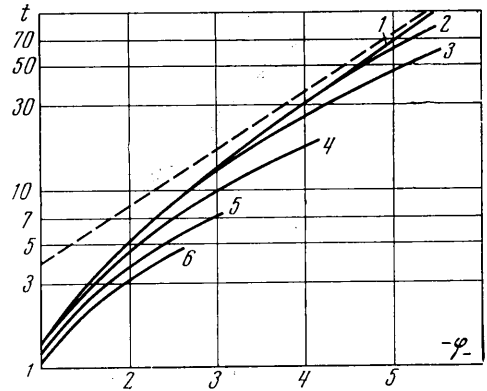
Имеется отличие в наклоне касательной к расчетной кривой и наклоне пунктирной прямой. Это несовпадение можно объяснить как влиянием погрешности счета, так и спецификой всплывания горячей зоны в данной задаче. Кривые для $A_p=0.0001 \div 0.1$ иллюстрируют промежуточный характер асимптотики [6]. В зависимости от величины A_p наблюдается большая или меньшая степень близости расчетной кривой к автомодельной линии (3.1); вслед за периодом наибольшего приближения наступает отход от автомодельности, обусловленный влиянием противодействия. На фиг. 3 показана эволюция профиля относительной скорости $u/u_2(\xi)$ за опускающейся-

ся волной при $A_p = A_g = 0$. Пунктиром отмечено автомодельное распределение [6]. Кривые 1–4 соответствуют времени 4.45, 6.23, 10.2, 20.8. Распределение скорости, близкое к 2, приведено для $t=6.5$ в работе [2], распределения 3, 4 получены на послепрорывной стадии. Видно, что с течением времени увеличивается зона близости расчетных профилей u/u_2 к автомодельному решению [6].

Численное исследование сильного взрыва в стандартной атмосфере проводилось без введения дополнительной границы ψ (см. фиг. 1, где обо-



Фиг. 5



Фиг. 6

значения 1–3 соответствуют данным расчетов при энерговыделениях на высотах 50, 80 и 100 км). Из полученных данных следует, что при взрыве в стандартной атмосфере на высотах $z_0 \leq 50$ км малым параметром на поздней стадии, как и в экспоненциальной атмосфере является величина $1/\phi_+$. При взрывах на больших высотах ($z_0 \geq 80$ км) не наблюдается сильно выраженного разгона верхнего фронта, однако быстро растут размеры верхней области, что указывает на присутствие малого параметра $1/\phi_+$. Для экспоненциальной атмосферы оба малых параметра $1/\phi_+$ и $1/\phi_-$ приводят к эквивалентным асимптотическим разложениям (см. [7, 12]).

На фиг. 2 (обозначения те же) приведены распределения газодинамических функций в случае $\gamma=1.4$ для двух моментов времени $t_1=6$ и $t_2=15$ (время t_2 примерно в 2 раза превышает время прорыва экспоненциальной атмосферы).

Получено хорошее совпадение распределений в нижней области. В верхней области распределения газодинамических величин при взрыве в стандартной атмосфере близки к соответствующим распределениям в экспоненциальной атмосфере. Видно практическое совпадение распределений скорости в момент t_2 в области расчета $\phi_-(t_2) \leq x \leq \psi(t_2)$ для экспоненциальной атмосферы с соответствующим распределением при $z_0 = 100$ км.

Авторы благодарны Л. А. Чудову за внимание к работе и полезные советы.

Поступила 29 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Компанеев А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 5.
2. Кестенбойм Х. С., Кузина З. Н. Распространение плоских ударных волн в экспоненциальной атмосфере. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
3. Markov A. A. On the late stage of the point explosion in an exponential medium and self-similar Raizer's and Hayes's solutions. Rozpr. Inz., 1974, vol. 22, No. 3.

4. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. М., «Наука», 1974.
5. Райзер Ю. П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшения плотности. ПМТФ, 1964, № 4.
6. Райзер Ю. П. Движение в неоднородной атмосфере, вызванное кратковременным плоским ударом. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 3.
7. Марков А. А. Об исследовании устойчивости некоторых автомодельных решений теории взрыва в атмосфере. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 1.
8. Марков А. А. Асимптотика затухающей плоской ударной волны в экспоненциальной атмосфере. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
9. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1957, т. 50.
10. Treve Y. M., Manley O. P. A point explosion in an arbitrary atmosphere. J. Fluid Mech., 1972, vol. 55, pt 4.
11. Кондрагьев К. Я. Метеорологические исследования с помощью ракет и спутников. Л., Гидрометеиздат, 1962.
12. Марков А. А. О близких к автомодельным решениях задачи плоского взрыва в экспоненциальной атмосфере. М., 1972. (ИПМ АН СССР. Препринт № 19.)
13. Hayes W. D. Self — similar strong shocks in an exponential medium. J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, pt 2. (Рус. перев.: Автомодельные сильные ударные волны в экспоненциальной среде. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 6.)
14. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С. Исследование некоторых задач теории точечного взрыва явным разностным методом. Ж. вычислит. матем и матем. физ. 1973, т. 13, № 4.