

РАЗВИТИЕ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В СЛУЧАЕ ИОНИЗАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
В КАНАЛЕ С НЕПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

В. М. ЗУБЦОВ, О. А. СИНКЕВИЧ

(Иркутск, Москва)

Исследуется ионизационная неустойчивость ограниченной непроводящими стенками плазмы с учетом электронной теплопроводности. Волновой вектор считается направленным под некоторым углом к направлению магнитного поля. Наиболее нестабильными оказываются возмущения с волновым вектором, ортогональным вектору индукции магнитного поля. Получена относительно простая формула для расчета нейтральной кривой, разделяющей области устойчивости и неустойчивости.

1. Рассматривается неравновесная замагниченная плазма, исходное уравнение — уравнение Больцмана для функции распределения электронов. Обсудим систему уравнений, описывающих поведение электронов в приближении сплошной среды. Нулевой и второй моменты уравнения Больцмана дают следующие уравнения для изменения числа электронов и их энергии

$$(1.1) \quad \frac{dn_e}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q}_n = N_+ - N_-$$

$$(1.2) \quad I \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_n \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial n_e T_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_T = \mathbf{j} \mathbf{E} - F_-$$

Здесь \mathbf{q}_n , \mathbf{q}_T — потоки электронов и энергии соответственно, n_e — концентрация электронов, T_e — температура электронов, \mathbf{j} — плотность электрического тока, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, N_+ — член, учитывающий рождение электронов и зависящий от вида процесса ионизации, N_- зависит от типа процесса рекомбинации, F_- учитывает энергию, передаваемую при упругих столкновениях от электронов к тяжелым частицам, I — потенциал ионизации.

Из решения уравнения Больцмана для случая покоящихся тяжелых частиц (или в системе координат, движущейся со скоростью тяжелых частиц), приведенного в [1], найдем следующие зависимости потоков частиц и энергии от электрического поля, градиентов концентрации и температуры:

$$(1.3) \quad \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_n \times \boldsymbol{\Omega} = -n_e \left\{ \mu_e \mathbf{E} + D_e \left[\frac{\nabla n_e}{n_e} + \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \frac{\nabla T_e}{T_e} \right] \right\}$$

$$(1.4) \quad \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_T \times \boldsymbol{\Omega} = -\lambda_e \nabla T_e + T_e \xi (\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_n \times \boldsymbol{\Omega})$$

где μ_e — подвижность электронов, D_e , λ_e — коэффициенты диффузии и теплопроводности электронов соответственно, $\boldsymbol{\Omega}$ — параметр Холла, ξ — численный коэффициент, определяемый зависимостью длины свободного пробега электронов от скорости.

Поскольку в системе координат, связанной со скоростью тяжелых частиц, плотность электрического тока определяется только потоком электронов, (1.3) эквивалентно закону Ома

$$(1.5) \quad \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\Omega} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{D_e}{\mu_e} \left[\frac{\nabla n_e}{n_e} + \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \frac{\nabla T_e}{T_e} \right] \right\}$$

Здесь σ — коэффициент электропроводности.

Используя уравнения (1.4), (1.5) и соотношение Эйнштейна $D_e/\mu_e = T_e/e$, преобразуем уравнение энергии (1.2) к виду

$$(1.6) \quad I \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_n \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial n_e T_e}{\partial t} + \frac{T_e}{e} \mathbf{j} \left(\nabla \ln n_e - \frac{3}{2} \nabla \ln T_e \right) + \\ + \xi T_e \operatorname{div} \mathbf{q}_n - \nabla M^+ \frac{\lambda_e}{1 + \Omega^2} \nabla T_e = \frac{j^2}{\sigma} - F_-$$

Если магнитное поле направлено по оси z , то компоненты тензора M^+ имеют вид: $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, $-a_{12} = a_{21} = \Omega$, $a_{33} = 1 + \Omega^2$.

2. Будем считать, что имеет место ионизационное равновесие. В этом случае уравнения (1.1), (1.5), (1.6) и уравнение Максвелла, записанное в предположении малости магнитного числа Рейнольдса, дают следующую систему уравнений:

$$(2.1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad n_e = n_e(T_e) \\ \left[I + \frac{3}{2} T_e \left(1 + \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_e} \right) \right] \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{T_e}{e} \mathbf{j} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_e} \right) \nabla \ln n_e - \\ - \nabla M^+ \frac{\lambda_e}{1 + \Omega^2} \nabla T_e = \frac{j^2}{\sigma} - \frac{3}{2} (T_e - T_a) \delta n_{cv} \\ \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\Omega} = \sigma \mathbf{E}^{\circ}, \quad \mathbf{E}^{\circ} = \mathbf{E} + \frac{T_e}{e} \left[\frac{\nabla n_e}{n_e} + \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \frac{\nabla T_e}{T_e} \right]$$

Здесь T_a — температура тяжелых частиц, δ — доля энергии, передаваемой электроном при столкновении с тяжелыми частицами, ν — частота столкновений электронов с тяжелыми частицами.

Исследуем устойчивость плазмы, описываемой системой уравнений (2.1), в области, ограниченной по оси x непроводящими стенками, расстояние между которыми b . Однородное магнитное поле направлено по оси z , невозмущенный ток — по оси y .

Вводя потенциал $\mathbf{E}^{\circ} = \operatorname{grad} \varphi$, после линеаризации закона Ома и исключения возмущений тока с помощью закона сохранения заряда получим

$$(2.2) \quad \sigma \left[\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + (1 + \Omega^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right] - j_{y0} \frac{\partial \Omega_0}{\partial n_{e0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) n_e' + \\ + \frac{j_{y0}}{\sigma_0} (1 + \Omega_0^2) \frac{\partial \sigma_0}{\partial n_{e0}} \frac{\partial n_0'}{\partial y} = 0$$

Индексом 0 обозначены невозмущенные величины, штрихом — их возмущения.

В стационарном однородном состоянии температура электронов определяется балансом джоулева нагрева и потерь энергии при упругих столкновениях

$$\frac{j_{y0}^2}{\sigma_0(T_0)} = \frac{3}{2} \delta T_0 n_0(T_0) \nu_0(T_0)$$

С учетом этого соотношения линеаризованное уравнение энергии имеет вид

$$(2.3) \quad \left[I + \frac{3}{2} T_{e0} (1 + \alpha_T) \right] \frac{\partial n_{e'}}{\partial t} + \frac{T_{e0}}{en_{e0}} j_{y0} \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_T \right) \frac{\partial n_{e'}}{\partial y} - \\ - \frac{T_{e0} \lambda_{e0} \alpha_T}{n_{e0} (1 + \Omega_0^2)} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (1 + \Omega_0^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] n_{e'} = \\ = - \frac{j_{y0}^2}{\sigma_0} \left\{ \left[(1 - \alpha_\mu) \left(1 - \frac{T_a}{T_e} \right) + \alpha_\sigma + \alpha_T \right] \frac{n_{e'}}{n_0} - 2 \frac{j_{y'}}{j_{y0}} \right\} \\ \alpha_T = \frac{\partial \ln T_{e0}}{\partial \ln n_{e0}}, \quad \alpha_\mu = \frac{\partial \ln \mu_{e0}}{\partial \ln n_{e0}}, \quad \alpha_\sigma = \frac{\partial \ln \sigma_0}{\partial \ln n_{e0}}$$

И, закона Ома получаем

$$(2.4) \quad \frac{j_{y'}}{j_{y0}} = \left(- \frac{\Omega_0^2}{1 + \Omega_0^2} \alpha_\mu + \alpha_\sigma \right) \frac{n_{e'}}{n_{e0}} + \frac{1}{1 + \Omega_0^2} \frac{\sigma_0}{j_{y0}} \left(\Omega_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

Выберем характерные величины и введем безразмерные параметры

$$(2.5) \quad l_x = b, \quad t_x = [I + \frac{3}{2} T_{e0} (1 + \alpha_T)] n_0 \sigma_0 j_{y0}^2 \\ \theta = \frac{n_{e'}}{n_{e0}}, \quad \Phi = \frac{\sigma_0}{j_{y0} b} \varphi^{(1)}$$

Используя эти определения, запишем уравнения (2.2) и (2.3) (предварительно подставив в (2.3) выражение (2.4)) в безразмерном виде

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_+^2} + (1 + \Omega_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_+^2} - \alpha_\mu \Omega_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_+} + \Omega_0 \frac{\partial \theta}{\partial y_+} \right) + (1 + \Omega_0^2) \alpha_\sigma \frac{\partial \theta}{\partial y_+} = 0$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t_+} + U \frac{\partial \theta}{\partial y_+} - \Lambda \left[\frac{\partial^2}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_+^2} + (1 + \Omega_0^2) \frac{\partial^2}{\partial z_+^2} \right] \theta + \\ + f' \theta - \frac{2}{1 + \Omega_0^2} \left(\Omega_0 \frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial y_+} \right) \Phi = 0$$

$$x_+ = \frac{x}{l_x}, \quad y_+ = \frac{y}{l_x}, \quad z_+ = \frac{z}{l_x}$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_{e0} T_{e0} \alpha_T}{b^2 j_{y0}^2 (1 + \Omega_0^2)}, \quad U = \frac{T_{e0} \sigma_0}{e b j_{y0}} \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_T \right)$$

$$f' = (1 - \alpha_\mu) \left(1 - \frac{T_a}{T_{e0}} \right) + \alpha_\sigma + \alpha_T$$

Граничные условия при $x=0$ и b представляют собой равенство нулю составляющей тока в направлении, перпендикулярном стенке

$$(2.8) \quad j_x = \frac{\sigma}{1 + \Omega^2} (E_x^\circ - \Omega E_y^\circ) = 0, \quad x=0, b$$

Для системы (2.6), (2.7) требуется еще два граничных условия. Сформулируем, следуя [2], простейшие условия $T_e' = 0$ при $x=0$ и b или в силу однозначной связи температуры и концентрации электронов

$$(2.9) \quad \theta = 0 \quad (x_+ = 0, 1)$$

Линеаризуя (2.8) с учетом (2.9) и обезразмеривая полученное выражение с помощью (2.5), имеем

$$(2.10) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_+} = \Omega_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y_+} \quad (x_+ = 0, 1)$$

3. Решение системы (2.6), (2.7) с граничными условиями (2.9), (2.10) будем искать в виде

$$(3.1) \quad \Phi = \Phi_0 \exp [i(k_x x_+ + k_y y_+ + k_z z_+) + pt_+] \quad \theta = \theta_0 \exp [i(k_x x_+ + k_y y_+ + k_z z_+) + pt_+]$$

Подставляя (3.1) в (2.6), (2.7), получим дисперсионное уравнение (условие нетривиальной совместности системы уравнений относительно амплитуд Φ_0 и θ_0)

$$(3.2) \quad \Lambda k_x^4 + \{p + ik_y U + 2\Lambda[k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2] + f' + 2a_{11}\} k_x^2 - \\ - 2\Omega_0 k_y a_{21} k_x + \Lambda[k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2]^2 + \\ + [k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2](p + ik_y U + f') + (\Omega_0^2 a_{21} + a_{11}) k_z^2 = 0$$

Здесь $a_{11} = -\alpha_\sigma$, $a_{21} = \alpha_\mu - \alpha_\sigma$ — коэффициенты, используемые в [3].

Применяя граничные условия (2.9), (2.10) к решению (2.6), (2.7), представляющему собой линейную комбинацию четырех экспонент (3.1) с k_{xj} ($j=1-4$), которые являются корнями уравнения (3.2), получим характеристическое уравнение для собственных значений задачи

$$(3.3) \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 e^{ik_{x1}} & A_2 e^{ik_{x2}} & A_3 e^{ik_{x3}} & A_4 e^{ik_{x4}} \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \\ \kappa_1 e^{ik_{x1}} & \kappa_2 e^{ik_{x2}} & \kappa_3 e^{ik_{x3}} & \kappa_4 e^{ik_{x4}} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_j = i(k_{xj} - \Omega_0 k_y), \quad \kappa_j = \frac{[2i/(1 + \Omega_0^2)](\Omega_0 k_{xj} + k_y)}{p + ik_y U + f' + \Lambda[k_{xj}^2 + k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2]}$$

В дальнейшем параметр Λ считается малым. В этом случае возможно приближенное аналитическое решение (3.2), причем порядок двух корней k_{x1} и k_{x2} ($k_{x2} = -k_{x1}$) в $1/\sqrt{\Lambda}$ раз больше порядка двух других корней k_{x3} и k_{x4} , которые можно получить из (3.2), записанного при $\Lambda=0$.

Подставляя эти корни в (3.3) и оставляя главный член определителя, имеющий порядок $\Lambda^{-1/2} \exp(\Lambda^{-1/2})$, получим для собственных чисел p уравнение: $\exp(ik_{x4}) - \exp(ik_{x3}) = 0$ или, используя явные выражения для k_{x3} и k_{x4}

$$(3.4) \quad (\Omega_0 k_y a_{21})^2 - \{p + ik_y U + 2\Lambda[k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2] + f' + 2a_{11}\} \times \\ \times \{\Lambda[k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2]^2 + [k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2](p + ik_y U + f') + \\ + (\Omega_0^2 a_{21} + a_{11})k_z^2 = (\pi n)^2 \{p + ik_y U + 2\Lambda[k_y^2 + (1 + \Omega_0^2)k_z^2] + \\ + f' + 2a_{11}\}^2 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Из этого соотношения следует: $\text{Im } P = -k_y U$, т. е. фазовая скорость распространения возмущений в направлении оси y равна

$$(3.5) \quad U = \frac{j_{y0}}{en_{e0}} - \frac{T_{e0}(1 - 3/2\alpha_T)}{I + 3/2T_{e0}(1 + \alpha_T)}$$

Используя уравнение Саха, можно выразить α_T через степень ионизации X

$$\alpha_T = \frac{T_{e0}}{I + 3/2T_{e0}} \frac{2 - X}{1 - X}$$

В этом случае результат совпадает со значением, полученным в [4] для безграничной плазмы. Таким образом, наличие непроводящих стенок не влияет на фазовую скорость распространения возмущений.

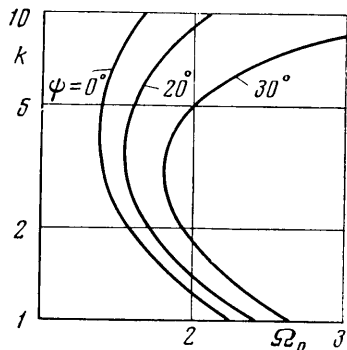
Полагая в (3.4) $\text{Re } p=0$, получаем с учетом (3.5) зависимость $\Omega_0(k)$ ($k^2=k_y^2+k_z^2$) — нейтральную кривую, отделяющую область устойчивости от области неустойчивости. На фигуре приведены результаты расчета нейтральных кривых первой моды ($n=1$) для плазмы $\text{Ar}+2.3 \cdot 10^{-5} \text{ Cs}$, давление $P=1 \text{ кг/см}^2$, $T_a=1500^\circ \text{ K}$, $T_c=3200^\circ \text{ K}$, $\Lambda=10^{-2}$. Все необходимые коэффициенты в (3.4) рассчитывались с помощью экспериментальных зависимостей, приведенных в [5]. Наиболее нестабильными оказываются возмущения с $\psi=0$ (ψ — угол между вектором невозмущенного тока j_{y0} и вектором $k=i_1 k_y+i_2 k_z$; i_1, i_2 — единичные векторы, направленные по осям y и z соответственно). Это объясняется тем, что электрическое поле и плотность электронов стремятся сохранить однородность в направлении магнитного поля. Аналогичный результат для случая безграничной плазмы получен в [6]. Из экспериментов следует, что в случае мягкого режима потери устойчивости возмущения с волновым вектором, ортогональным вектору индукции магнитного поля, наиболее нестабильны и преобладают в нелинейной стадии развития ионизационной неустойчивости.

Полагая в (3.4) $k_z=0$, $\text{Re } p=0$, получим уравнение нейтральной кривой

$$(3.6) \quad (\Omega_0 k_y a_{21})^2 - k_y^2 (2\Lambda k_y^2 + f' + 2a_{11}) (\Lambda k_y^2 + f') = (\pi n)^2 (2\Lambda k_y^2 + f' + 2a_{11})^2$$

формально совпадающее с уравнением, полученным в [3], отличающееся видом f' (в [3] предполагалось $T_c \gg T_a$ и $I \gg T_{e0}$).

Таким образом, кроме того, что возмущения с волновым вектором, ортогональным вектору индукции магнитного поля, наиболее нестабильны, из данного рассмотрения можно извлечь довольно простую формулу (3.6) для расчета нейтральных кривых. Эта формула учитывает диссипативные процессы (электронная теплопроводность) и граничные условия, т. е. позволяет выявить возмущения с наибольшей скоростью роста.



Поступила 20 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохитим А., Массель Г. Вычисление коэффициентов переноса в ионизованных газах. В кн. «Кинетические процессы в газах и плазме». М., Атомиздат, 1972.
2. Shioda S., Heruya I. Electrothermal instability with effects of electron thermal conduction and wall boundaries. 12-th Nat. Sympos. Engng Aspects. MHD, Argonne, Illinois, USA, 1972. (Рус. перев.: Электротермическая неустойчивость с учетом электронной теплопроводности и пограничного слоя. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы, 1973, № 3.)
3. Синкевич О. А. О характере потери устойчивости в неравновесной замагниченной плазме. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
4. Недоспасов А. В. Скорость ионизационных волн в низкотемпературной плазме. В кн. «МГД генераторы», т. 1. М., Ин-т науч. информации АН СССР, 1967.
5. Nakamura T. Stability of the nonequilibrium MHD plasma in the regime of fully ionized seed. 12-th Nat. Sympos. Engng Aspects MHD, Argonne, Illinois, USA, 1972. (Рус. перев.: Устойчивость неравновесной МГД плазмы при полной ионизации присадки. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы, 1973, № 4.)
6. Елисеев Б. В. Неустойчивость пондеромоторной силы в слабо ионизованной плазме. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 6.