**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1976**

УДК 533.697.4:532.529

ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ С КОАГУЛЯЦИЕЙ И ДРОБЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ ПОЛИДИСПЕРСНОГО КОНДЕНСАТА В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛАХ

Б. Н. МАСЛОВ, А. А. ШРАЙБЕР

(Москва, Киев)

Изложен метод расчета параметров неравновесного течения двухфазных смесей «газ – полидисперсные капли конденсата» с учетом коагуляции и дробления частиц при столкновениях. Задача рассматривается в двумерной постановке, влияние вязкости и теплопроводности газа учитывается только при описании межфазового взаимодействия.

Известен ряд работ, посвященных исследованию неравновесного течения двухфазной смеси газ – полидисперсные капли при условии полной коагуляции соударяющихся частиц [1–3] либо их коагуляции и дробления [4, 5]. Наиболее общий случай произвольного распределения образующихся при дроблении вторичных капель по массам, скоростям и температурам рассмотрен в [5]. Существенный недостаток этих работ — одномерная постановка задачи; известно [6,7], что эффекты, связанные с неодномерностью течения, играют в двухфазной газодинамике важную роль (неравномерное распределение частиц по поперечному сечению сопла, наличие в сверхзвуковой части периферийной зоны чистого газа и зон с повышенной концентрацией частиц, взаимодействие частиц со стенкой и т. д.). Для расчета двумерных течений смеси газа с монодисперсными частицами в сверхзвуковой части сопла широкое распространение получил метод характеристик [7–10]; при этом расчет дозвукового течения производился весьма приближенно, с использованием тех или иных упрощений. Эффективный метод расчета траекторий и параметров монодисперсных частиц конденсата в до- и сверхзвуковой части сопла (при известном поле течения газа) разработан в [6]. В настоящей статье предлагается метод определения параметров двухфазного течения с полидисперсными частицами (т. е. с учетом коагуляции и дробления их при соударениях) в двумерной постановке. Метод является в известной мере синтезом результатов, полученных в [5] и [6].

1. Основные соотношения. Будем считать выполненными условия, оговоренные, например, в [7], что позволяет для описания двухфазного полидисперсного течения использовать модель многоскоростной, многотемпературной среды. Объем, занимаемый частицами, считаем пренебрежимо малым. Как и в [4, 5], при описании взаимодействия частиц используем «непрерывный» подход, т. е. условно заменим дискретное изменение массы и других параметров частиц при столкновениях непрерывным. При этом в отличие от [4, 5] будем рассматривать фракции фиксированного размера δ_s. Естественно, в различных точках геометрического пространства этот размер имеют частицы, размеры которых во входном сечении были различны.

Введем функцию распределения частиц по размерам $g(\delta_s, x, y) \equiv g_s$ так, что $d\rho_s = g_s d\delta_s$ представляет собой плотность «газа» частиц размером $(\delta_s, \delta_s + d\delta_s)$ в точке геометрического пространства с декартовыми координатами x, y (ось x направлена вдоль оси потока). Очевидно, плотность газа всего конденсата $\rho_s = \int_0^\infty g_s d\delta_s$. Задача сводится к отысканию девяти неизвестных функций — g_s, компонентов скорости $u_s(\delta_s, x, y) \equiv u_s$, $v_s(\delta_s, x, y) \equiv$ $\equiv v_s$ и температуры $T_s(\delta_s, x, y) \equiv T_s$ частиц конденсата, а также параметров газа — давления $P(x, y)$, плотности $\rho(x, y)$, температуры $T(x, y)$ и компонентов скорости $u(x, y)$, $v(x, y)$. Вопрос об определении скоростей и температур вторичных капель (осколков) размера δ_s, образующихся при дроблении более крупных частиц, будет подробно рассмотрен в п. 2.

В случае отсутствия взаимодействия частиц уравнение неразрывности газа частиц фракции δ_s, $\delta_s+d\delta_s$ (ниже для краткости будем писать s) имеет вид [7]

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(d\rho_s)\,d\tau + \iint\limits_{\Omega} d\rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{n}\, d\Omega = 0 \tag{1.1}$$

где τ — некоторый неподвижный объем, Ω — его поверхность, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль, $\mathbf{w}_s$ — скорость частиц s, t — время. Однако при наличии взаимодействия нужно дополнительно учесть перераспределение массы конденсата между фракциями за счет рождения и гибели частиц s, с этой целью введем в правую часть (1.1) член

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{D}{Dt}(d\rho_s)\,d\tau = d\delta_s \iiint\limits_{\tau} \frac{Dg_s}{Dt} g_s\, d\tau.$$

Здесь и далее D в производной указывает, что изменение связано с взаимодействием частиц. Кроме того, необходимо также учесть изменение размеров фиксированных частиц (миграцию частиц по оси размеров). Для учета последнего фактора рассмотрим фракцию s в моменты t (плотность $d\rho_s = g_s(\delta_s)\,d\delta_s$) и $t' = t+dt$ (плотность $d\rho_s' \neq d\rho_s$, $d\rho_s' = g_s(\delta_s + dt\cdot d\delta_s/dt)\,d\delta_s[1 + d/d\delta_s(d\delta_s/dt)\,dt]$); тогда в левую часть (1.1) дополнительно вводится величина $\displaystyle\iiint \frac{d\rho_s' - d\rho_s}{dt}\,d\tau.$

Таким образом для стационарного течения аналогично [7] получаем

$$g_s\frac{\partial u_s}{\partial x} + g_s\frac{\partial v_s}{\partial y} + g_s j\frac{v_s}{y} + u_s\frac{\partial g_s}{\partial x} + v_s\frac{\partial g_s}{\partial y} + \tag{1.2}$$
$$+\frac{\partial g_s}{\partial \delta_s}\frac{d\delta_s}{dt} + g_s\frac{d}{d\delta_s}\left(\frac{d\delta_s}{dt}\right) = \frac{Dg_s}{Dt}$$

(для плоского случая $j=0$, для осесимметричного $j=1$).

Здесь и ниже под $d\delta_s/dt$ понимается скорость изменения размера фиксированной частицы δ_s.

Подобным же образом может быть получен общий вид уравнений движения и энергии частиц

$$u_s\frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial u_s}{\partial \delta_s}\frac{d\delta_s}{dt} = A_s(u-u_s) + \frac{Du_s}{Dt} \tag{1.3}$$

$$u_s\frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s\frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial \delta_s}\frac{d\delta_s}{dt} = A_s(v-v_s) + \frac{Dv_s}{Dt} \tag{1.4}$$

$$u_s\frac{\partial E_s}{\partial x} + v_s\frac{\partial E_s}{\partial y} + \frac{\partial E_s}{\partial \delta_s}\frac{d\delta_s}{dt} = \tag{1.5}$$
$$= A_s[u_s(u-u_s) + v_s(v-v_s)] + B_s(T-T_s) + \frac{DE_s}{Dt}$$

Здесь $E_s = c_B T_s + 0{,}5(u_s^2 + v_s^2)$ — энергия частиц s

$$A_s\frac{3\rho c_D}{4\rho_B\delta_s}|\mathbf{w}-\mathbf{w}_s|,\quad B_s = \frac{6\nu\rho\,\mathrm{Nu}\,c_p}{\rho_B\delta_s^2\,\mathrm{Pr}}$$

w — скорость газа; c_B, ρ_B — теплоемкость и плотность вещества конденсата; c_D — коэффициент сопротивления; ν — кинематическая вязкость; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; Pr, Nu — числа Прандтля и Нуссельта. Последние члены в (1.3)—(1.5) учитывают то обстоятельство, что «новые» частицы s (образовавшиеся в результате коагуляции более мелких или дробления более крупных) могут иметь в общем случае скорость и температуру, отличные от параметров других частиц этой фракции. По этой же причине интенсивность теплового и гидродинамического взаимодействия новых частиц s с газом может отличаться от взаимодействия других частиц фракции s; следовательно, в уравнения движения и энергии газа [7] должны быть включены дополнительные слагаемые

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\int_0^\infty A_s'(u-u_s)\,d\delta_s+\frac{Du}{Dt}=0 \tag{1.6}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\int_0^\infty A_s'(v-v_s)\,d\delta_s+\frac{Du}{Dt}=0 \tag{1.7}$$

$$uc_p\frac{\partial T}{\partial x}+vc_p\frac{\partial T}{\partial y}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+\int_0^\infty A_s'[u_s(u-u_s)+v_s(v-v_s)]\,d\delta_s+\int_0^\infty B_s'(T-T_s)\,d\delta_s+\frac{DE}{Dt}=0. \tag{1.8}$$

Здесь $E=c_pT+0.5\mathrm{w}^2$ — энергия газа; $A_s'=A_sg_s\rho$; $B_s'=B_sg_s\rho$. Для замыкания системы используются известные уравнения состояния и неразрывности газа

$$p=R\rho T \tag{1.9}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho j\frac{v}{y}=0 \tag{1.10}$$

(R — газовая постоянная).

2. **Взаимодействие частиц.** Подобно [5] обозначим через $\Phi(\delta_r,\delta_s)\equiv\equiv\Phi_{rs}$ $(\delta_r<\delta_s)$ математическое ожидание изменения массы капли s, связанного с ее взаимодействием с частицами другой фракции r за некоторое время (взаимодействие r—s) и отнесенного к общей массе столкнувшихся с ней частиц r. Поскольку при этом взаимодействии (если $\Phi_{rs}\neq1$) образуются осколки размером $\delta_q\in(0,\delta_s)$, введем функцию их распределения по размерам — α_{rsq}. Очевидно, $\int_0^{\delta_s}\alpha_{rsq}d\delta_q=1$.

Аналогично [2, 4, 5] в данном случае нетрудно получить

$$\frac{d\delta_s}{dt}=(2\delta_s^2\rho_B)^{-1}\int_0^{\delta_s}\Phi_{rs}K_{rs}g_r\,d\delta_r;\qquad K_{rs}=k_{rs}(\delta_r+\delta_s)^2|\mathrm{w}_r-\mathrm{w}_s| \tag{2.1}$$

где K_{rs} — константа взаимодействия, k_{rs} — коэффициент захвата (осаждения).

Для вычисления правой части (1.2) разобъем ее на три слагаемых D_ig_s/Dt ($i=$ $=1, 2, 3$): первое связано с изменением размера частиц δ_s при их взаимодействии с более мелкими каплями, второе — с уменьшением количества частиц s при взаимодействии с более крупными, третье — с рождением осколков s при столкновениях $q-r$ ($\delta_r>\delta_s$, $\delta_q<\delta_r$). Легко показать, что

$$\frac{D_1g_s}{Dt}=\frac{3g_s}{\delta_s}\frac{d\delta_s}{dt}$$

где $d\delta_s/dt$ определяется в соответствии с (2.1). Изменение плотности газа частиц $r(\delta_r>\delta_s)$ при условии их коагуляции с частицами s (предполагаем, что дробление отсутствует), очевидно, составит

$$\left(\frac{D_1 g_r}{Dt}\right)_s^\circ = \frac{3g_r}{\delta_r}\left(\frac{d\delta_r}{dt}\right)_s^\circ$$

Здесь градус означает отсутствие дробления, нижний индекс s – взаимодействие только с фракцией s, выражение $(d\delta_r/dt)_s^\circ$ может быть получено из (2.1) соответствующей заменой индексов, если опустить Ф и знак интегрирования. Поскольку $(D_2 g_s/Dt)_r d\delta_s = -(D_1 g_r/Dt)_s^\circ d\delta_r$, в итоге получаем

$$\frac{D_2 g_s}{Dt} = -\frac{3g_s}{2\rho_B}\int\limits_{\delta_s}^{\infty} K_{sr}\frac{g_r}{\delta_r^3}\,d\delta_r$$

Учитывая, что при взаимодействии $q-r$ масса образующихся осколков на единицу массы «снарядов» равна $(1-\Phi_{qr})$, аналогично предыдущему находим

$$\frac{D_3 g_s}{Dt} = \frac{3}{2\rho_B}\int\limits_{\delta_s}^{\infty}\int\limits_{0}^{\delta_r}\frac{g_r g_q}{\delta_r^3}K_{qr}(1-\Phi_{qr})\alpha_{qrs}\,d\delta_q\,d\delta_r$$

Таким образом

$$\frac{Dg_s}{Dt} = \frac{3g_s}{\delta_s}\frac{d\delta_s}{dt} + \frac{3}{2\rho_B}\int\limits_{\delta_s}^{\infty}\frac{g_r}{\delta_r^3}\left[\int\limits_{0}^{\delta_r} g_q K_{qr}(1-\Phi_{qr})\alpha_{qrs}\,d\delta_q - g_s K_{sr}\right]d\delta_r \qquad (2.2)$$

Вычислим члены Du_s/Dt, Du/Dt и др. в уравнениях (1.3)–(1.8), учитывающие отличие скоростей и температур осколков от скоростей и температур «старых» частиц того же размера. Для этой цели должны быть приняты дополнительные гипотезы о распределении избытка (недостатка) импульса и энергии новых частиц. Назовем гипотезой I предположение о равномерном распределении этого избытка между всеми частицами данной фракции [1, 2, 4, 5], гипотезой II – предположение о весьма быстрой передаче избытка импульса газу, так что новые частицы приобретают скорость и температуру, характерные для других частиц этой фракции [3, 11]. Применимость той или иной гипотезы в первую очередь зависит от отношения между временем свободного пробега частицы (между последовательными столкновениями) и временем ее динамической и тепловой релаксации [3]. Как показывают оценочные расчеты, в реальных условиях это отношение может быть как больше единицы, так и существенно меньше. Поэтому, как и в [3, 11], рассмотрим наиболее общий случай, когда определенная часть избытка (недостатка) импульса и энергии новых частиц s $((u'_{rs}-u_s)$, $(E'_{rs}-E_s)$, $(u'_{qrs}-u_s)$ и т. д.) распределяется между всеми частицами данной фракции, а другая часть $((u_{rs}-u'_{rs})$, $(u_{qrs}-u'_{qrs})$ и т. д.) передается газу на расстояниях меньше длины свободного пробега капли s. Здесь под u_{qrs}, v_{qrs}, E_{qrs} понимается начальное значение компонентов скорости и энергии капель s, образовавшихся при взаимодействии $q-r$ $(\delta_r>\delta_s,\ \delta_q<\delta_r)$, под u_{rs}, v_{rs}, E_{rs} – скорость и энергия той части массы капель s, которая перешла при столкновениях из меньших частиц r (естественно, с учетом образования осколков); величины $u'_{rs}\in(u_s, u_{rs})$, $u'_{qrs}\in(u_s, u_{qrs})$ и т. д.

В [5] приведены результаты измерения проекции осредненной начальной скорости осколков s на направление вектора относительной скорости сталкивающихся капель q и r (проекция $(\mathbf{w}_{qrs}-\mathbf{w}_r)$ на плоскость, перпендикулярную к $(\mathbf{w}_q-\mathbf{w}_r)$, осредненная по углу встречи взаимодействующих капель, естественно, равна нулю); при этом $\mathbf{w}_{qrs}=\mathbf{w}_r+\beta_{qrs}(\mathbf{w}_q-\mathbf{w}_r)$, или в проекциях на оси x и $y-u_{qrs}=u_r+\beta_{qrs}(u_q-u_r)$, $v_{qrs}=v_r+\beta_{qrs}(v_q-v_r)$. Энергия осколков s $E_{qrs}=c_B T_{qrs}+0{,}5w_{qr}^2$, где аналогично предыдущему $T_{qrs}=T_r+\gamma_{qrs}(T_q-T_r)$; здесь β_{qrs}, γ_{qrs} — коэффициенты начальной скорости и температуры осколков.

Вычислим u_{rs}. Пусть за время dt частица s присоединила массу $\pi/2\rho_B\delta_s^2(d\delta_s/dt)_r dt$ частиц r, двигавшихся перед столкновением со скоростью u_r; кроме того, образовались осколки q ($\delta_q\in(0,\delta_s)$), масса которых равна $\pi/2\rho_B\delta_s^2(d\delta_s/dt)_r dt(1-\Phi_{rs})\alpha_{rsq}d\delta_q$, а начальная скорость — u_{rsq}. Из изложенного следует:

$$\Phi_{rs}u_{rs}=u_r-\int_0^{\delta_s}(1-\Phi_{rs})\alpha_{rsq}u_{rsq}\,d\delta_q$$

v_{rs}, E_{rs} определяются аналогично. Заметим, что при $\Phi_{rs}=0$ (масса образующихся осколков равна массе столкнувшихся с частицей s снарядов r), u_{rs} обращается в бесконечность, так как в общем случае правая часть отлична от нуля. Таким образом, при неизменной массе частицы столкновения приводят к изменению ее импульса.

Величина Du_s/Dt может быть разбита на два слагаемых: первое из них обусловлено взаимодействием частиц s с меньшими частицами и аналогично по смыслу D_1g_s/Dt, второе — рождением осколков s при взаимодействии $q-r$ (аналогично D_3g_s/Dt). Вычисления приводят к результату:

$$(2.3)\qquad \frac{Du_s}{Dt}=\frac{3}{2\delta_s^3\rho_B}\int_0^{\delta_s}K_{rs}\Phi_{rs}g_r(u_{rs}'-u_s)\,d\delta_r+\frac{3}{2g_s\rho_B}\times$$
$$\times\int_{\delta_s}^{\infty}\frac{g_r}{\delta_r^3}\int_0^{\delta_r}K_{qr}g_q(1-\Phi_{qr})\alpha_{qrs}(u_{qrs}'-u_s)\,d\delta_q\,d\delta_r$$

Выражения Dv_s/Dt и DE_s/Dt могут быть получены из (2.3) заменой u на v и E соответственно. Анализ условий сохранения импульса и энергии двухфазной смеси приводит к выражениям

$$(2.4)\qquad \frac{DL}{Dt}=-\frac{3}{2\rho_B\rho}\int_0^{\infty}\left[\frac{g_s}{\delta_s^3}\int_0^{\delta_s}K_{rs}g_r\Phi_{rs}(L_{rs}-L_{rs}')\,d\delta_r+\right.$$
$$\left.+\int_{\delta_s}^{\infty}\int_0^{\delta_r}\frac{g_r}{\delta_r^3}K_{qr}g_q(1-\Phi_{qr})\alpha_{qrs}(L_{qrs}-L_{qrs}')\,d\delta_q\,d\delta_r\right]d\delta_s\qquad (L=u,v,E)$$

Для дальнейшего уравнение (1.8) с помощью (1.6), (1.7), (1.9) удобно привести к виду

$$(2.5)\qquad u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}-\varkappa RT\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)-$$
$$-\int_0^{\infty}A_s''[(u-u_s)^2+(v-v_s)^2+B_s''(T_s-T)]\,d\delta_s+I=0$$
$$I=\rho(\varkappa-1)\left(u\frac{Du}{Dt}+v\frac{Dv}{Dt}-\frac{DE}{Dt}\right)$$

где $\varkappa$ — показатель адиабаты для газа, $A_s''=A_s'\rho(\varkappa-1)$, $B_s''=8c_p\mathrm{Nu}_s/\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_s\zeta_s$, Re_s — критерий Рейнольдса. Заметим, что при использовании гипотезы I $L_{rs}'=L_{rs}$, $L_{qrs}'=L_{qrs}$, так что все производные DL/Dt

обращаются в нуль, и уравнения (1.6)—(1.8), (2.5) сводятся к уравнениям [7]; аналогично принятие гипотезы II ($L_{rs}'=L_s$; $L_{qrs}=L_s$) обращает в нуль Du_s/Dt, Dv_s/Dt и DE_s/Dt.

3. **Метод расчета.** Введем «естественную» систему координат ξ, ψ, где $\xi=x$, $\partial\psi/\partial y=y^j\rho u$, $\partial\psi/\partial x=-y^j\rho v$ (ψ — функция тока газа, $\psi=\text{const}$ — линии тока). Уравнение неразрывности (1.10) при этом заменяется следующими равенствами:

$$(3.1)\qquad \frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{v}{u},\qquad \frac{\partial y^{j+1}}{\partial\psi}=\frac{j+1}{\rho u}$$

Кроме того, для произвольной функции F

$$(3.2)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial\xi}-y^j\rho v\frac{\partial F}{\partial\psi},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=y^j\rho u\frac{\partial F}{\partial\psi}$$

С учетом (3.2) и (1.9) уравнения движения (1.6), (1.7) и энергии (2.5) двухфазной смеси приводятся к виду

$$(3.3)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial\xi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\int_0^\infty A_s\left[(u-u_s)+\frac{v}{u}(v-v_s)\right]d\delta_s+ \\ +\frac{Du}{Dt}+\frac{v}{u}\frac{Dv}{Dt}=0$$

$$(3.4)\qquad \frac{\partial p}{\partial\psi}+\frac{1}{y^j}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{1}{y^ju}\int_0^\infty A_s'(v-v_s)\,d\delta_s+\frac{1}{y^ju}\frac{Dv}{Dt}=0$$

$$(3.5)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial\xi}-\frac{\rho}{\varkappa p}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\rho}{\varkappa pu}\int_0^\infty A_s''[(u-u_s)^2+(v-v_s)^2+ \\ +B_s''(T_s-T)]\,d\delta_s=\frac{\rho I}{\varkappa pu}$$

Заметим, что в случае течения чистого газа или равновесного течения смеси в (3.3)—(3.5) сохраняются два первых члена.

В работе [12] описан обратный метод расчета двумерных течений газа, позволяющий с высокой точностью определить параметры в сверхзвуковой, трансзвуковой и дозвуковой частях сопла, причем расчет ведется по единой схеме. Сущность метода [12] состоит в интегрировании системы (1.9), (3.1), (3.3)—(3.5) по слоям $\psi=\text{const}$, т. е. по известным w, p и др. на слое $\psi_n=\text{const}$ вычисляются параметры течения на соседнем слое $\psi_{n+1}=\text{const}$ и т. д.; при этом на оси ($\psi=0$) задается распределение скорости газа. К сожалению, для двухфазных течений аналогичное интегрирование уравнений движения и энергии частиц по слоям $\psi=\text{const}$ приводит к существующему усложнению задачи, так как уравнения (1.3)—(1.5) в координатах $\psi-\xi$ имеют вид ($L=u$, v, E):

$$(3.6)\qquad \frac{\partial L_s}{\partial\psi}=\frac{1}{y^j\rho(uv_s-u_sv)}\left(M-u\frac{\partial L_s}{\partial\xi}-\frac{\partial L_s}{\partial\delta_s}\frac{d\delta_s}{dt}\right)$$

Здесь M — правая часть (1.3)—(1.5), причем знаменатель в правой части (3.6) обращается в нуль (или очень близко к нулю) по крайней мере в трех случаях: 1) вблизи входного сечения, где течение практически равновесно ($u_s\approx u$, $v_s\approx v$), 2) в области минимального сечения, 3) в пристенной зоне сверхзвуковой части сопла (в случаях 2) и 3) линии тока газа и траектории частиц имеют близкие касательные, $v/u\approx v_s/u_s$). В связи с этим представляется целесообразным интегрировать уравнения (1.2)—(1.5) либо вдоль линий тока газа, либо вдоль траекторий частиц. В последнем случае уравнения (1.2)—(1.5) удобно записать в координатах ξ, ψ_s, где ψ_s=const — траектории частиц δ_s. В рассматриваемой задаче взаимодействие частиц различного размера и связанное с ним перераспределение конденсата между фракциями приводит к тому, что в трубке тока частиц s (ограниченной траекториями ψ_{sk}=const, ψ_{sl}=const) их расход не сохраняется. Поэтому используем следующий прием. Пусть $g_s=g_s'+g_s''$; при этом уравнение неразрывности (1.2) эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$g_s'\frac{\partial u_s}{\partial x}+g_s'\frac{\partial v_s}{\partial y}+g_s'j\frac{v_s}{y}+u_s\frac{\partial g_s'}{\partial x}+v_s\frac{\partial g_s'}{\partial y}=0 \tag{3.7}$$

$$g_s''\frac{\partial u_s}{\partial x}+g_s''\frac{\partial v_s}{\partial y}+g_s''j\frac{v_s}{y}+u_s\frac{\partial g_s''}{\partial x}+v_s\frac{\partial g_s''}{\partial y}=N_s \tag{3.8}$$

$$N_s\equiv Dg_s/Dt-(\partial g_s/\partial\delta_s)(d\delta_s/dt)-g_s\frac{d}{d\delta_s}(d\delta_s/dt)$$

Из (3.7) и (3.8) становится ясным физический смысл g_s' и g_s''. Функция g_s' представляет собой функцию распределения тех частиц s, которые существовали во входном сечении сопла, и показывает, как менялась бы концентрация частиц s в присутствии межфракционного взаимодействия. Функция g_s'' учитывает изменение концентрации частиц s в результате их взаимодействия (дробления и коагуляции) с частицами других фракций, движущимися, вообще говоря, по другим траекториям, т. е. относится к новым частицам s (к их появлению или исчезновению). Естественно, значение g_s'' может быть отрицательным, если концентрация частиц s убывает. Очевидно, в трубке тока частиц s расход старых (существовавших во входном сечении) частиц остается неизменным, поскольку (3.7) полностью аналогично уравнению неразрывности газа (1.10). При этом подобно предыдущему имеем

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial y}=y^jg_s'u_s,\qquad \frac{\partial\psi_s}{\partial x}=-y^jg_s'v_s$$

$$\frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{v_s}{u_s},\qquad \frac{\partial y^{j+1}}{\partial\psi_s}=\frac{j+1}{u_sg_s'} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial\xi}-y^jv_sg_s'\frac{\partial F}{\partial\psi_s},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=y^ju_sg_s'\frac{\partial F}{\partial\psi_s} \tag{3.10}$$

В координатах ξ, ψ_s уравнения движения и энергии частиц (1.3)—(1.5) с учетом (3.10) принимают вид

$$\frac{\partial u_s^2}{\partial\xi}=2A_s(u-u_s)+2\frac{Du_s}{Dt}-2\frac{\partial u_s}{\partial\delta_s}\frac{d\delta_s}{dt} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial\xi}=\frac{1}{u_s}\left[A_s(v-v_s)+\frac{Dv_s}{Dt}-\frac{\partial v_s}{\partial\delta_s}\frac{d\delta_s}{dt}\right] \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial\xi}=\frac{1}{u_s}\Big\{A_s[u_s(u-u_s)+v_s(v-v_s)]+ \tag{3.13}$$

$$+B_s(T-T_s)+\frac{DE_s}{Dt}-\frac{\partial E_s}{\partial\delta_s}\frac{d\delta_s}{dt}\Big\}$$

а уравнение неразрывности новых частиц (3.8) –

$$(3.14)\qquad u_s\frac{\partial g_s''}{\partial\xi}+g_s''\frac{\partial u_s}{\partial\xi}+g_s''j\frac{v_s}{y}+g_s'g_s''y^j\left(u_s\frac{\partial v_s}{\partial\psi_s}-v_s\frac{\partial u_s}{\partial\psi_s}\right)=N_s$$

Численное интегрирование полученной системы (1.9), (3.1), (3.3) – (3.5), (3.9), (3.11) – (3.14) целесообразно вести итерационным методом. При этом каждая итерация состоит из двух этапов: на первом этапе интегрируются уравнения течения газа, причем для вычисления членов, учитывающих влияние частиц на газ ($A_s'(u-u_s)$, Du/Dt и др.), используются параметры частиц, полученные на предыдущей итерации, на втором – уравнения течения газа частиц, для чего используются вычисленные на первом этапе параметры газового поля. Алгоритм первого этапа следующий (предполагаем, что на слое ψ_n параметры газа известны): из (3.4) и второго уравнения (3.1) находятся p и y для слоя ψ_{n+1}; далее численным дифференцированием вдоль слоя ψ_{n+1} определяются $\partial y/\partial\xi$ и $\partial p/\partial\xi$, а интегрированием вдоль него – ρ и w из (3.3) и (3.5); наконец, из (1.9) вычисляется температура газа, а из очевидных соотношений $v=w(\partial y/\partial\xi)[1+(\partial y/\partial\xi)^2]^{-1/2}$, $u=\sqrt{w^2-v^2}$ – компоненты его скорости. Интегрирование уравнений течения газа частиц (второй этап) проводится по линиям $\xi=\mathrm{const}$. При этом алгоритм расчета следующий (предполагаем, что на линии ξ_i параметры всех частиц известны): из первого уравнения (3.9) находятся траектории частиц s на участке сопла $\xi_i-\xi_{i+1}$; поскольку вдоль траекторий значения ψ_s не меняются, из второго уравнения (3.9) определяются g_s', а из (3.11) – (3.13) – u_s, v_s, E_s на линии ξ_{i+1}; далее численным дифференцированием вдоль линии ξ_{i+1} находятся $\partial v_s/\partial\psi_s$ и $\partial u_s/\partial\psi_s$, что позволяет из (3.14) вычислить g_s''.

Из изложенного следует, что для каждой итерации должны быть известны параметры течения газа на оси сопла, а также параметры течения газа частиц во входном сечении потока (последние можно определить на основании правдоподобной гипотезы о равномерности и равновесности течения во входном сечении). Расчет течения газа для первой итерации (когда параметры движения частиц еще неизвестны) проводится на основании гипотезы о равновесности; при этом члены, учитывающие влияние частиц на газ, предполагаются равными нулю, но показатель адиабаты $\varkappa$ и газовая постоянная R заменяются эффективными их значениями, вычисленными применительно к течению смеси [7].

Предложенная схема с использованием обратного метода [12] позволяет после ряда итераций определить параметры двухфазного течения в до-, транс- и сверхзвуковой частях сопла, если известно начальное распределение скорости газа на оси. Заметим, что в ряде случаев может оказаться целесообразным использование описанного метода только для до- и трансзвуковой области с последующим расчетом сверхзвукового течения в заданном контуре методом характеристик. При этом расчет параметров полидисперсного конденсата по-прежнему ведется по формулам (3.9), (3.11) – (3.14) в соответствии с описанной схемой.

Поступила 23 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин С. Д., Тишин А. П., Хайрутдинов Р. И.* Неравновесное двухфазное течение в сопле Лаваля с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. *Тишин А. П., Хайрутдинов Р. И.* К расчету коагуляции частиц конденсата в соплах Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
3. *Крайко А. Н., Шрайбер А. А.* К построению модели, описывающей в одномерном приближении двухфазное течение с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата. ПМТФ, 1974, № 2.
4. *Бабуха Г. Л., Стернин Л. Е., Шрайбер А. А.* Расчет двухфазных потерь в соплах при наличии коагуляции и дробления капель конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
5. *Подвысоцкий А. М., Шрайбер А. А.* Расчет неравновесного двухфазного течения с коагуляцией и дроблением частиц конденсата при произвольном распределении вторичных капель по массам и скоростям. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
6. *Камзолов В. Н., Маслов Б. Н., Пирумов У. Г.* Исследование траекторий частиц в соплах Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
7. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М., «Машиностроение», 1974.

8. *Дритов Г. В., Тишин А. П.* Расчет неравновесного течения газа с частицами конденсата в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
9. *Kliegel J. R., Nickerson G. R.* Flow of gas-particle moxtures in axially symmetric nozzles. In: Detonation and Two-Phase Flow. N. Y., Acad. Press., 1962. (Рус. перев.: Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. В сб. «Детонация и двухфазное течение». М., «Мир», 1966).
10. *Hoffman J. D., Lorenc S. A.* A parametric study of gas-particle flows in conical nozzles. AIAA Journal, 1965, vol. 3, № 1.
11. *Marble F. E.* Mechanism of particle collision in the one-dimensional dynamics of gas-particle mixtures. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, № 8.
12. *Пирумов У. Г.* Расчет течения в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.