

СФЕРИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ПАРА ПРИ ИСПАРЕНИИ КАПЛИ

В. И. ЖУК

(Москва)

На основе обобщенного кинетического уравнения Крукса [1] численным конечно-разностным методом в стационарной и нестационарной постановках решена задача об испарении сферической частицы. Рассмотрены случаи испарения в вакуум и в затопленное пространство с учетом уменьшения размеров и охлаждения капли. Определена величина минимального расхода массы для стационарного испарения в вакуум при малых числах Кнудсена. Результаты сравниваются с данными других авторов для сферической, а также для плоской задач.

В большинстве предшествующих работ использовались различные приближенные методы, которые сводятся либо к линеаризации задачи [2, 3], либо к применению формулы Герца — Кнудсена [4]. Неточная процедура сопряжения свободномолекулярного и диффузионного потоков на некотором расстоянии от поверхности капли [5] совершенно непригодна при отсутствии нейтрального газа. В статье [6] приведены формулы для скорости роста капли в слабо переохлажденном паре, полученные из решения эллипсоидальной кинетической модели методом моментов.

Рассмотрим конденсированную сферическую частицу радиуса $r_s = r_s(t)$, окруженную паром того же вещества без примесей. Движение пара будем исследовать при помощи кинетического уравнения, имеющего вид в обозначениях [7, 8]

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cos \omega \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\xi \sin \omega}{r} \frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{1}{\tau} (f^+ - f)$$

Граничные условия на поверхности капли задаются в виде максвелловской функции с параметрами n_s , T_s , коэффициент испарения предполагается равным единице. Температура капли T_s и плотность насыщенного пара n_s связаны уравнением фазового равновесия. На бесконечности параметры n_∞ , T_∞ считаются известными функциями времени.

Ниже все величины обезразмерены по формулам

$$r' = \frac{r}{r_*}, \quad t' = \frac{t \sqrt{2RT_*}}{r_*}, \quad n' = \frac{n}{n_*}, \quad T' = \frac{T}{T_*}, \quad u' = \frac{u}{\sqrt{2RT_*}}$$

В качестве масштаба длины r_* выберем радиус капли в начальный момент $r_s(0)$. Число Кнудсена Kn определим по радиусу r_* , молекулы будем предполагать максвелловскими.

Считая распределение температуры внутри капли однородным, уравнения баланса массы и энергии запишем в виде [4]

$$(2) \quad \varepsilon (nu)_s = - \frac{dr_s}{dt}, \quad -\varepsilon \beta (M_{raa})_s = \frac{r_s}{3} \frac{dT_s}{dt} + \left(-\frac{5}{2} \beta T_s - \delta \right) \frac{dr_s}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho_*}{\rho_i}, \quad \beta = \frac{R}{c}, \quad \delta = \frac{h}{cT_*}$$

Здесь ρ_i и c — плотность и удельная теплоемкость капли, h — скрытая теплота парообразования, R — газовая постоянная, $\rho_* = m n_*$. Потoki массы $(\rho u)_s$ и энергии $(M_{\text{газ}})_s$ на поверхности капли отнесены к величинам $m n_* \sqrt{2RT_*}$ и $1/2 m n_* (2RT_*)^{3/2}$.

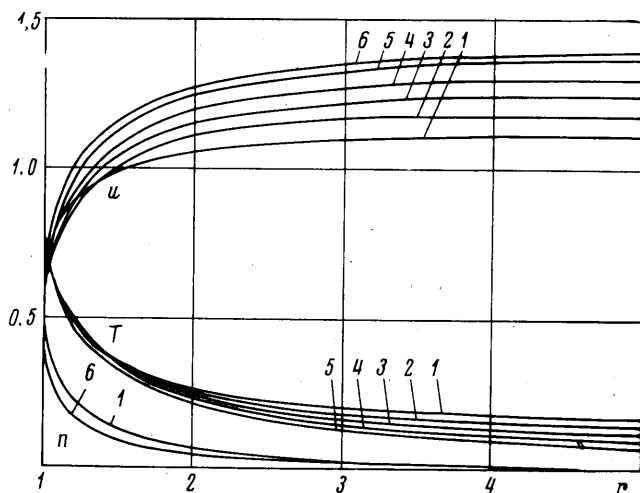
При численном интегрировании уравнения (1) использовался метод конечных разностей

$$(3) \quad \frac{f_{ij}^k - f_{ij}^{k-1}}{\Delta t} + \xi \cos \omega_j \frac{f_{\eta+1j}^k - f_{\eta j}^k}{\Delta r} - \frac{\xi \sin \omega_j}{r_i} \frac{f_{ij+1}^k - f_{ij}^k}{\Delta \omega} = \frac{1}{\tau_{ik}} (f_{ij}^+ - f_{ij}^k)$$

$$\eta = i \text{ для } \pi/2 \leq \omega \leq \pi, \quad \eta = i-1 \text{ для } 0 \leq \omega < \pi/2$$

Индексы i, j, k соответствуют узлу разностной сетки $\{r_i, \omega_j, t_k\}$: $r_i = i \Delta r$, $\omega_j = j \Delta \omega$, $t_k = k \Delta t$.

Рассмотрим сначала задачу об испарении в стационарной постановке. Положим $n_* = n_s$, $T_* = T_s$. В отличие от одномерной задачи [9] существует

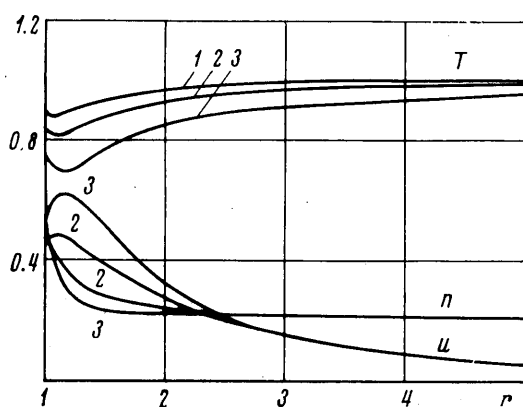


Фиг. 1

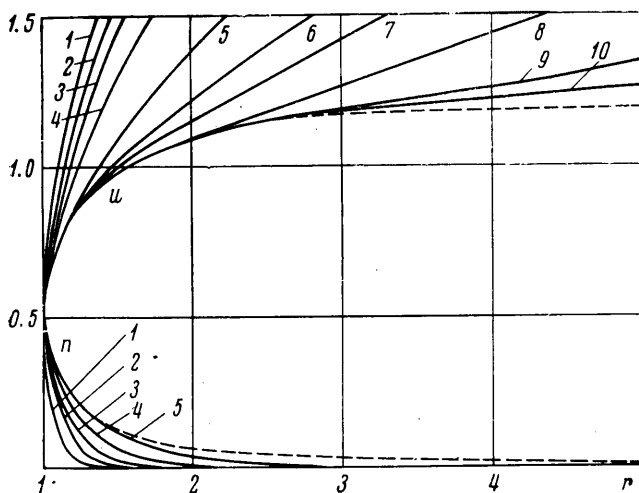
стационарное решение при испарении в вакуум. Профили макропараметров для этого случая показаны на фиг. 1 при различных числах Кнудсена (1 — $\text{Kn} = \infty$, 2 — $\text{Kn} = 0.1$, 3 — $\text{Kn} = 0.05$, 4 — $\text{Kn} = 0.025$, 5 — $\text{Kn} = 0.01$, 6 — $\text{Kn} = 0.005$). В пределе $\text{Kn} \rightarrow 0$ решение представляет собой сверхзвуковую газодинамическую ветвь, за исключением трансзвуковой области толщиной $\text{Kn}^{2/3}$ вблизи поверхности, где необходимо учитывать влияние вязкости. Внутренним по отношению к трансзвуковой зоне является слой Кнудсена толщиной порядка Kn . Решение при $\text{Kn} \rightarrow 0$ построено в [10] по уравнениям Навье — Стокса с использованием аппроксимации Града для определения граничных условий на сфере.

В настоящей работе при численном решении уравнения (1) с целью ускорения сходимости при малых числах Кнудсена итерационный процесс включает в себя интегрирование неоднородных уравнений Эйлера и Навье — Стокса (вблизи поверхности), в которых неравновесные члены вычисляются через функцию распределения. Величины скачков макропараметров хорошо согласуются с результатами [10]. При $\text{Kn} = 0.0025$ значения скорости, плотности и температуры на поверхности сферы равны $u_0 = 0.36$, $\rho_0 = 0.645$, $T_0 = 0.843$, в [10] для этих же величин приведены зна-

чения соответственно 0.353, 0.645, 0.838. Поток массы с уменьшением числа Кнудсена монотонно изменяется от 0.282 при $Kn=\infty$ до 0.23 при $Kn\rightarrow 0$, что также соответствует [10]. Вследствие бесконечных градиентов у поверхности одномерное решение для слоя Кнудсена [9] неприменимо к задаче об испарении сферы в вакуум при $Kn\rightarrow 0$, в частности, предель-



Фиг. 2



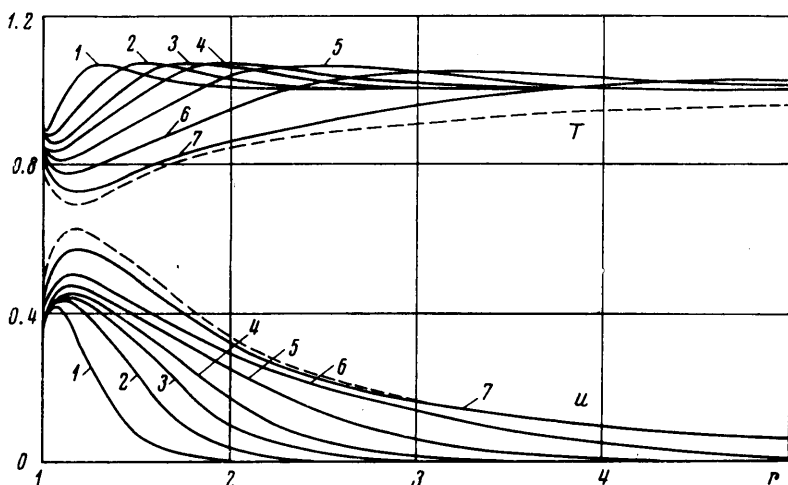
Фиг. 3

ное значение потока массы 0.26, приведенное в [11], несколько выше найденного в данной работе.

Для испарения в затопленное пространство результаты численного решения при $n_\infty=0.2$, $T_\infty=1$ представлены на фиг. 2 (1 — $Kn=\infty$, 2 — $Kn=0.5$, 3 — $Kn=0.1$). Немонотонность профилей температуры и скорости связана с тенденцией к образованию ударной волны. Медленный выход температуры на предельное значение T_∞ обусловлен тепловым потоком к сфере на бесконечности.

Связь внутреннего [9] и внешнего решений при $Kn\rightarrow 0$ можно осуществить только для дозвукового течения. При испарении сферы для достаточно малых n_∞ , зависящих от T_∞ , имеет место сверхзвуковое течение с переходом к дозвуковому через ударную волну.

При исследовании нестационарной задачи наличие малого параметра $\varepsilon = \rho_*/\rho_i$ в уравнениях баланса (2) позволяет пренебречь изменением радиуса и температуры капли. В случае свободномолекулярного испарения со сферической поверхности постоянного радиуса r_s и температуры T_s в



Фиг. 4

первоначально пустое пространство $r > r_s$ для макропараметров справедливости формулы

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{n_s}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(a) - \sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^2} [1 - \operatorname{erf}(b)] + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{T_s}{\pi}} \frac{t}{r} [(1 - 2b^2)e^{-b^2} - e^{-a^2}] \right\} \\
 u &= \frac{n_s}{n} \sqrt{\frac{T_s}{\pi}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_s}{2} \frac{t^2}{r^2} [e^{-b^2} - e^{-a^2}] + \frac{r_s}{r} e^{-a^2} \right\} \\
 T &= \frac{2}{3n} \left\{ \frac{3}{4} n_s T_s \left[1 - \operatorname{erf}(a) - \sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^2} (1 - \operatorname{erf}(b)) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n_s T_s^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{t}{r} [e^{-b^2} - e^{-a^2}] + \frac{n_s T_s}{2\sqrt{\pi}} \frac{r_s}{r} a e^{-a^2} - n u^2 \right\} \\
 a &= \frac{r - r_s}{\sqrt{T_s} t} \quad b = \frac{\sqrt{r^2 - r_s^2}}{\sqrt{T_s} t}
 \end{aligned}$$

Для $r \rightarrow \infty$, а также для $t \rightarrow 0$ поведение решения такое же, как и в разлете сферического облака в вакуум [8]. При $t \rightarrow \infty$ асимптотика совпадает со стационарным решением, приведенным в [7].

Изменение плотности и скорости со временем при испарении в вакуум показано на фиг. 3 для $\text{Kn} = 0.1$ (цифрами 1–10 обозначены последовательные моменты времени $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5, 7$, штриховые линии относятся к $t = \infty$). Установление решения происходит на временах

$t \approx 10$, однако в дальней по r области течение близко к свободномолекулярному, причем $u \rightarrow \infty$ для $r \gg t$. Нестационарное решение для плоской геометрии, найденное в [12], соответствует ближайшей окрестности сферы при $\text{Kn} \rightarrow 0$. По оценке [12] поток массы в конце переходного процесса уменьшается на 20%. Этот результат согласуется с вычисленным в данной работе обратным потоком для стационарного испарения в вакуум при $\text{Kn} \rightarrow 0$ (18% прямого свободномолекулярного потока).

Процесс радиального расширения пара при наличии противодействия иллюстрируется на фиг. 4 для $\text{Kn}=0.1$, $n_\infty=0.2$, $T_\infty=1$. В начальный момент положено $n(r)=n_\infty$, $T(r)=T_\infty$, $u(r)=0$, $r>1$, кривые 1–7 изображают профили температуры и скорости для значений времени $t=0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2.5, 6$. Время выхода на конечное стационарное решение (штриховая линия) определяется установлением поля температуры на больших r .

Для капели с большим давлением пара необходимо учитывать изменение радиуса и температуры, так как время релаксации поля макропараметров

сравнивается со временем охлаждения капли. В качестве примера рассмотрим испарение капли аргона, для которого критическое давление и температура равны $p_c=49 \text{ атм}$, $T_c=151^\circ \text{ К}$. В начальный момент состояние окружающего пара предполагается однородным с $T_\infty=90^\circ \text{ К}$, $p_\infty=1 \text{ атм}$, начальная температура капли $T_s=130^\circ \text{ К}$ близка к критической, при этом $p_s/p_\infty \approx 20$. Результаты расчетов для $\text{Kn}=0.2$, $\epsilon=0.005$, $\delta=1$, $\beta=0.2$ представлены на фиг. 5. Зависимость давления насыщенного пара от температуры аппроксимировалась формулой

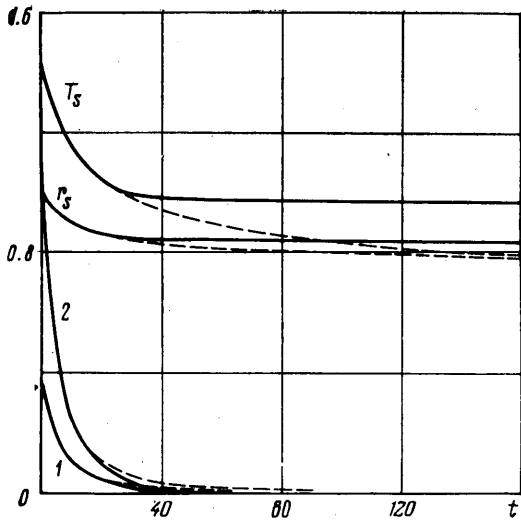
$$\ln p/p_c = 2.32(1 - T_c/T_s)$$

Параметры на фиг. 5 обезразмерены по отношению к условиям на бесконечности, т. е. $T_* = T_\infty(0)$, $n_* = n_\infty(0)$, кривые 1 и 2 изображают величины $(nu)_s \cdot 10^{-1}$ и $(M_{\text{рад}})_s \cdot 10^{-1}$ соответственно. Сплошные линии относятся к случаю $n_\infty = T_\infty = \text{const}$. Штриховыми линиями нанесено решение при изменении параметров на бесконечности по закону

$$n_\infty(t) = (1 + 0.2t)^{-2}, \quad T_\infty = n_\infty^{2/3}$$

Для малых времен расширение пара имеет взрывообразный характер и влияние внешних условий незначительно. После быстрого охлаждения капли решение выходит на режим квазистационарного испарения. На больших интервалах времени поток энергии меняет знак (при $n_\infty = T_\infty = \text{const}$) и поддерживается за счет теплопередачи к сфере.

Поступила 4 IV 1975



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крукса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
2. Shankar P. N. A kinetic theory of steady condensation. J. Fluid. Mech., 1970, vol. 40, pt 2.
3. Shankar P. N., Marble F. E. Kinetic theory of transient condensation and evaporation at a plane surface. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 3.
4. Hill P. G. Condensation of water vapour during supersonic expansion in nozzles. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, pt 3.
5. Кань Сан-вук. Исследование роста конденсированных частиц в разреженных и континуальных средах. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 7.
6. Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. Об испарении и конденсации сферических капель при произвольных числах Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
7. Шахов Е. М. Установившееся течение разреженного газа от сферического источника или стока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
8. Жук В. И. Разлет сферического облака разреженного газа в вакуум. В сб. «Численные методы в динамике разреженных газов», вып. 2. М., ВЦ АН СССР, 1975.
9. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
10. Edwards R. H., Collins R. L. Evaporation from a spherical source into a vacuum. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 2, New York — London, Acad. Press., 1969.
11. Макашев Н. К. Сильная переконденсация в одно- и двухкомпонентном разреженном газе при произвольном значении числа Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
12. Анисимов С. И., Рахматулина А. Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум. ЖЭТФ, 1973, т. 64, вып. 3.