

## О ВЛИЯНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИИ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ

Г. С. МАРКМАН, А. Л. УРИНЦЕВ

(Ростов-на-Дону)

Исследуется возникновение конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости, подверженной высокочастотной вибрации. Используются нелинейные уравнения конвекции в приближении Буссинеска, осредненные по времени. Амплитуда возмущений предполагается малой, но конечной. Для горизонтального слоя с твердыми стенками установлено существование как докритических, так и сверхкритических устойчивых вторичных режимов.

В линейной постановке задача устойчивости при наличии модуляции рассматривалась в работах [1-3]. Исследованию нелинейной задачи посвящены работы [4-6]. В [4] методом сеток были изучены вторичные режимы в полости квадратного сечения. В случае горизонтального слоя со свободными границами [5, 6] характер ветвления установлен методом малого параметра.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный параллельными твердыми стенками  $y=0$ ,  $y=l$ . Предполагается, что температура на нижней и верхней стенках поддерживается постоянной и весь слой как единое целое совершает вертикальные колебания с частотой  $\omega'$  и амплитудой  $a/\omega'$ . Уравнения для двумерных возмущений в подвижной системе координат, связанной с колеблющимся слоем, в приближении Буссинеска имеют вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + K(\Psi', \Delta \Psi') &= \nu \Delta^2 \Psi' + \beta(a\omega' \sin \omega' t - g) \frac{\partial T'}{\partial x} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + K(\Psi', T') &= \chi \Delta T' - A \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad K(u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

где  $\Psi'$ ,  $T'$  — возмущения функции тока и температуры,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  — коэффициенты вязкости, температуропроводности, теплового расширения,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $A$  — равновесный градиент.

В случае высокой частоты  $\omega'$  к уравнениям (1.1) применяется процедура осреднения, описанная в [7] для трехмерного случая. В результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + K(\Psi', \Delta \Psi') + \frac{1}{2} K(\Phi', \Delta \Phi') &= \nu \Delta^2 \Psi' - \beta g \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\beta a A}{2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + K(\Psi', T') &= \chi \Delta T' - A \frac{\partial \Psi'}{\partial x}, \quad \Delta \Phi' = \beta a \frac{\partial T'}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь  $\Psi'$ ,  $T'$  — плавные составляющие функции тока и температуры,  $\Phi'$  — амплитуда осцилляций быстро меняющейся составляющей функции

тока. Переходя к безразмерным переменным

$$x=lx_1, y=ly_1, t=\frac{l^2}{\nu}t_1, \Psi'=\nu\Psi, T'=\frac{\nu^2}{\beta gl^3}T, \Phi'=\frac{2gl^2\nu}{a\chi}\Phi$$

и вводя вихрь  $\Omega$ , имеем (индексы у  $t, x, y$  опущены)

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + K(\Psi, \Omega) + PK\left(\Phi, \frac{\partial T}{\partial x}\right) &= \Delta \Omega + R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \Delta \Psi = \Omega \\ P \frac{\partial T}{\partial t} + PK(\Psi, T) &= \Delta T - R \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Delta \Phi = \mu \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\nu}{\chi}, \quad R = \frac{\beta g A l^4}{\nu \chi}, \quad \mu = \frac{a^2 \nu \chi}{2g^2 l^4}$$

Здесь  $P, R, \mu$  — числа Прандтля, Рэлея и вибрационный параметр. Заметим, что при таком введении безразмерных переменных число Рэлея входит линейно и в отличие от [7] вибрационный критерий не зависит от градиента тепла, а определяется лишь физическими свойствами жидкости и амплитудой вибрации. Граничные условия на твердых горизонтальных границах таковы:

$$(1.3) \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = T = \Phi = 0 \quad (y=0, 1)$$

Далее изучаются не зависящие от  $t$  решения задачи (1.2), (1.3), периодические по  $x$  с фиксированным периодом  $2\pi/\alpha$  и исследуется их устойчивость. При этом первый метод Ляпунова применяется к осредненной системе (1.2). Законность исследования устойчивости периодических решений исходной задачи (1.1) по спектру устойчивости осредненной задачи (1.2) доказана в [8]. Законность линейзации стационарных осредненных уравнений доказывается так же, как и в [9].

2. **Линейная задача.** Нелинейной системе (1.2) соответствует линеаризованная

$$(2.1) \quad \Delta \omega = \frac{\partial \tau}{\partial x} - R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \Delta \psi = \omega, \quad \Delta \tau = R \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta \varphi = \mu \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

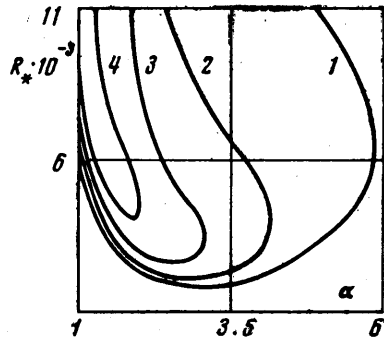
Отделяя переменную  $x$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi &= \alpha u(y) \sin \alpha x, \quad \omega = \alpha v(y) \sin \alpha x \\ \tau &= w(y) \cos \alpha x, \quad \varphi = \alpha z(y) \sin \alpha x \end{aligned}$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} D^2 u &= \alpha^2 u + v, \quad D^2 v = \alpha^2 (v + Rz) - w \\ D^2 w &= \alpha^2 (Ru + w), \quad D^2 z = \alpha^2 z - \mu w \quad \left( D = \frac{d}{dy} \right) \end{aligned}$$

с граничными условиями  $u = Du = w = z = 0$  ( $y=0, 1$ ). Разыскивая решение задачи (2.3) по методу Джеффриса [10] в виде рядов Фурье по функциям



Фиг. 1

$\sin n\pi y$  ( $n=1, 2, \dots$ ), приходим к двум трансцендентным уравнениям

$$(2.4) \quad \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n = 0, \quad \sum_{n=2,4,6,\dots} a_n = 0$$

$$a_n = \frac{n^2(n^2\pi^2 + \alpha^2)^2}{(n^2\pi^2 + \alpha^2)^4 - \alpha^2 R(n^2\pi^2 + \alpha^2) + \mu\alpha^4 R^2}$$

Из первого уравнения определяются критические числа Рэлея  $R_*(\alpha)$  для четных относительно оси симметрии  $y=0.5$  собственных функций линейной задачи, из второго — для нечетных. Заметим, что из представления (2.4) сразу вытекает, что отрицательных чисел Рэлея не существует и что наличие вибрации оказывает стабилизирующее влияние на возникновение конвекции ( $dR/d\mu|_{\mu=0} > 0$ ). Уравнения (2.4) оказались очень удобными для вычислений на ЭВМ, так как каждый из рядов представим в виде двух, первый из которых имеет известную сумму, а второй ряд быстро сходится (его члены убывают как  $n^{-8}$ ).

Нейтральные кривые  $R_*(\alpha)$  имеют вид «мешка». На фиг. 1 представлены нейтральные кривые 1—4, соответствующие нижнему уровню (четная собственная функция) при  $\mu=1 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 10^{-4}$ . Как и в работах [1, 11], при  $\mu$ , большем предельного  $\mu_*$ , наступает абсолютная стабилизация. Вычисленное  $\mu_*$  равно  $4.88805 \cdot 10^{-4}$ .

Зависимость минимизированного по  $\alpha$  числа Рэлея  $R_{cr}$  и соответствующего ему волнового числа  $\alpha_{cr}$  от параметра  $\mu$  аппроксимируется формулами

$$\alpha_{cr} = Q_1^{1/2}, \quad R_{cr} = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad Q_1 = \sum_{n=0}^5 q_n (\mu \cdot 10^4)^n, \quad Q_2 = \sum_{n=0}^6 p_n (\mu \cdot 10^4)^n$$

$i$	$q_i \cdot 10$	$p_i$	$i$	$q_i \cdot 10$	$p_i$
0	96.881	16592	4	-1.0393	328.18
1	-2.9020	206.58	5	0.0893	-75.384
2	-6.3111	610.66	6	—	5.9507
3	3.5301	-686.99			

Полиномы наилучшего приближения  $Q_1$  и  $Q_2$ , построенные по результатам расчетов нейтральных кривых, обеспечивают 2—3 верных знака во всем диапазоне изменения вибрационного критерия  $\mu$ . При  $\mu$ , близких к  $\mu_*$ , можно пользоваться более простыми асимптотическими формулами

$$\alpha_{cr} = 205.71(\mu_* - \mu)^{1/2}, \quad R_{cr} = 0.24(\mu_* - \mu)^{-1}$$

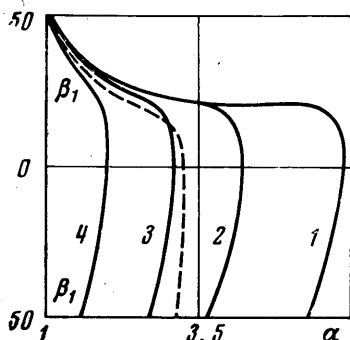
полученными аналитическими методами. Заметим, что аналогичные результаты установлены и для двух следующих мод.

Заметим, что кривые  $R_*(\alpha)$  (фиг. 1) аналогичны нейтральным кривым работы [1]. Последние были рассчитаны методом Галеркина с использованием двух координатных функций. Точность найденных таким способом критических параметров оказывается недостаточной для решения нелинейной задачи (например,  $\mu_* = 6.02 \cdot 10^{-4}$ ), тогда как трансцендентное уравнение (2.4) позволяет определить критические значения с любой заранее заданной точностью. Заметим, что отличие приближенных значений  $R_*$  из [1] от точных быстро увеличивается по мере приближения к  $\mu_*$ , достигая, например, 50% при  $\mu = 4.5 \cdot 10^{-4}$ .

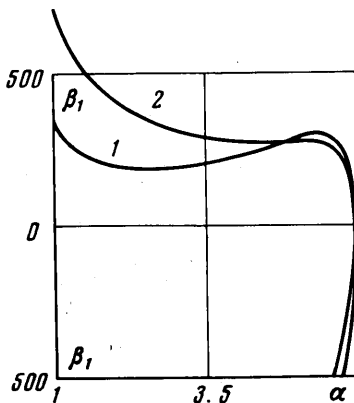
3. **Нелинейная задача.** Стационарное решение задачи (1.2) ищем в виде [12, 13]

$$(3.1) \quad (\Psi, \Omega, T, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (\Psi_n, \Omega_n, T_n, \Phi_n), \quad R=R_*(\alpha) + \varepsilon^2 \delta$$

где величина  $\delta$ , равная  $\pm 1$ , ответственна за знак приращения числа Рэлея. Как показали проведенные расчеты,  $\delta=1$  на нижней ветви нейтральной кривой  $R_*(\alpha)$  до крайней правой точки и  $\delta=-1$  на верхней ветви. Отметим, что непосредственно в крайней правой точке нейтральной кривой



Фиг. 2



Фиг. 3

разложения (3.1) теряют силу вследствие кратности собственного значения.

Подставляя (3.1) в уравнения (1.2), получим серию линейных задач для определения  $\Psi_n, \Omega_n, T_n, \Phi_n$ , решаемых последовательно методом разделения переменных. Задача для членов первого порядка по  $\varepsilon$  совпадает с линейной однородной (2.1) и ее решение определено с точностью до произвольного множителя  $\beta_1$  формулой (2.2). Условие нормировки взято в форме  $w(0.5)=1$  для четных решений и в форме  $Dw(0.5)=1$  для нечетных. Постоянная определяется из условия ортогональности правой части задачи для членов третьего порядка по  $\varepsilon$  к решению линейной сопряженной задачи. Компоненты решения сопряженной задачи  $\psi_c, \omega_c, \tau_c, \varphi_c$  явно выражаются через решение линейной задачи следующим образом:

$$(3.2) \quad \psi_c = \psi, \quad \omega_c = \omega, \quad \tau_c = (\alpha^2 z - w/R_*) \cos \alpha x, \quad \varphi_c = \alpha w \sin \alpha x$$

Значение  $\beta_1$  вычисляется по формуле

$$(3.3) \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{2I_1 \delta}{\alpha^2 (\alpha^2 I_2 - P I_3)}}, \quad I_1 = \int_0^{0.5} (w/R_* - 2\alpha^2 z) u dy$$

$$I_2 = \int_0^{0.5} [v D \xi - u D \eta + 2(\xi D v - \eta D u) + P(z D \zeta - w D \lambda + 2 \zeta D z - 2 \lambda D w)] u dy$$

$$I_3 = \int_0^{0.5} (u D s + 0.5 u D \zeta + 2 \xi D w + \zeta D u + w D \xi) (\alpha^2 z - w/R_*) dy$$

где знак  $\delta$  выбирается так, чтобы обеспечить положительность подкоренного выражения, а функции  $\xi$ ,  $\lambda$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$  и  $s$  переменной  $y$  являются решениями следующих краевых задач:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} D^2 s &= -P(wDu + uDw), \quad s(0) = s(1) = 0 \\ D^2 \xi &= 4\alpha^2 \xi + \eta, \quad D^2 \lambda = 4\alpha^2 \lambda - \mu \zeta \\ D^2 \eta &= 4\alpha^2 \eta - \zeta + 4\alpha^2 R_* \lambda + 0.5[vDu - uDv + P(zDw - wDz)] \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} D^2 \zeta &= 4\alpha^2 \zeta + 4\alpha^2 R_* \xi - P(uDw - wDu) \\ \xi = D\xi = \lambda = \zeta &= 0 \quad (y=0, 1) \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости вторичного течения (3.1) и состояния относительного покоя вблизи границы устойчивости использован метод возмущений [13]. Вычисления дают для декрементов следующие формулы:

$$(3.6) \quad \sigma_2 = -2\sigma \varepsilon^2 \delta + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_0 = \sigma(R - R_*) + o(|R - R_*|)$$

$$\sigma = \frac{2\alpha^2 I_1}{I_4}, \quad I_4 = \int_0^{0.5} \left[ \alpha^2 uv + Pw \left( \alpha^2 z - \frac{w}{R_*} \right) \right] dy$$

(положительное значение декремента соответствует неустойчивости,  $\sigma_0$  — основному,  $\sigma_2$  — вторичному течению). Краевые задачи (2.3), (3.4), (3.5) сводились к нескольким задачам Коши, которые интегрировались на ЭВМ методом Рунге-Кутты. Симметрия решений позволяет сократить интервал интегрирования в 2 раза.

Некоторые результаты вычислений приведены на фиг. 2—4. Кривые 1—4 на фиг. 2 иллюстрируют зависимость коэффициента  $\beta_1$  от  $\alpha$  для тех же значений  $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 10^{-4}$ , что и на фиг. 1. Пунктирная линия соответствует второму уровню неустойчивости при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  (соответствующие значения  $\beta_1$  уменьшены в 20 раз). Графики фиг. 2 получены при числе Прандтля равном единице.

В отличие от случая обычной стационарной конвекции (без тряски), для которой теоретически доказано [14] существование только закритических вторичных режимов вблизи нейтральной кривой, вибрация приводит к качественному изменению характера ветвления: закритическое ветвление ( $\delta = 1$ ) на нижней ветви нейтральной кривой сменяется докритическим ( $\delta = -1$ ) на верхней. При этом обращение в нуль коэффициента  $\beta_1$  соответствует прохождению крайней правой точки нейтральной кривой  $R_*(\alpha)$ . Таким образом, на всей нейтральной кривой вторичные режимы ответвляются внутрь области неустойчивости.

Ниже линии  $\beta_1 = 0$  на фиг. 2 условно отложены положительные значения константы  $\beta_1$ , соответствующие докритическим режимам течения. Влияние числа Прандтля при фиксированном  $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$  отражено на фиг. 3. Кривая 1 соответствует  $P = 0.044$  (ртуть), кривая 2 —  $P = 7520$  (глицерин, значения  $\beta_1$  увеличены в  $10^5$  раз).

Как можно видеть из уравнений (3.4), (3.5), знаменатель в (3.3) зависит от числа Прандтля квадратично, а числитель от  $P$  не зависит. Это позволяет дать простую формулу

$$\beta_1 = |c_0 + c_1 P + c_2 P^2|^{-1/2}$$

Наибольший интерес представляют вторичные режимы, ответвляющиеся в точке минимума  $\alpha_c$  нейтральной кривой. Зависимость соответ-

ствующих коэффициентов  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  от вибрационного параметра  $\mu$  представлена ниже:

$\mu \cdot 10^4$	$c_2 \cdot 10^3$	$c_1 \cdot 10^7$	$c_0 \cdot 10^5$
0.5	1.88	-123	2.31
1.0	1.86	-116	2.37
1.5	1.84	-108	2.46
2.0	1.83	-98.6	2.58
2.5	1.84	-86.8	2.78
3.0	1.88	-71.2	3.12
3.5	1.98	-47.7	3.72
4.0	2.21	-9.86	4.87
4.5	2.69	53.7	7.12

Коэффициент  $c_2$  вдоль всей нейтральной кривой оказался отрицательным, что свидетельствует об устойчивости вторичного течения при всех волновых числах  $\alpha$ .

Вычисления показали, что одному и тому же волновому числу  $\alpha$  и двум разным числам Рэлея, соответствующим нижней и верхней ветвям нейтральной кривой, отвечают значения коэффициента  $\sigma$ , отличающиеся лишь знаком. Поэтому на фиг. 4 изображена зависимость  $\sigma(\alpha)$  только вдоль нижней ветви ( $\mu=1 \cdot 10^{-4}$ ,  $P=1$ ). Отметим, что в случае двух свободных границ симметрия кривой  $\sigma(\alpha)$  непосредственно следует из явной формулы (3.7).

Заметим, что до сих пор исследовалось возникновение вторичного режима при фиксированном  $\mu$  и изменяющемся числе Рэлея  $R$ . Это соответствует вариации градиента температуры при заданной интенсивности вибрации. Вместе с этим представляется разумным исследовать характер возникновения вторичных режимов при фиксированной разности температур на стенках и меняющемся вибрационном параметре. Метод исследования аналогичен изложенному выше. Оказалось, что константа  $\delta$  всюду на нейтральной кривой  $\mu(\alpha)$  равна  $-1$ , т. е. имеет место докритическое ветвление. Это, в частности, свидетельствует о том, что предельное значение  $\mu_*$ , найденное по линейной теории, является таковым и для нелинейной задачи.

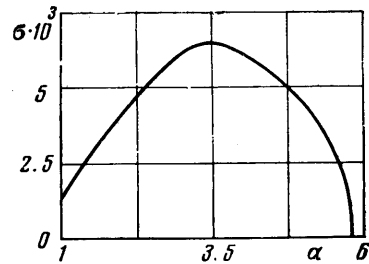
Отметим также, что для случая двух свободных границ (аналог задачи Рэлея) сохраняются перечисленные выше утверждения о характере ветвления и устойчивости вторичных режимов. Простота граничных условий позволяет получить эти результаты для всех уровней неустойчивости без применения ЭВМ. Например, для  $n$ -й моды граница устойчивости, коэффициенты  $\beta_1$ ,  $\sigma$  и  $\mu_*$  даются формулами

$$(3.7) \quad R_* = \frac{M(1 \pm \sqrt{1 - 4\mu M^2})}{2\mu\alpha^2}, \quad M = n^2\pi^2 + \alpha^2, \quad \mu_* = \frac{1}{4\pi^4 n^4}$$

$$\beta_1 = \frac{2\sqrt{2}\alpha R_*}{PM^2} (1 - 4\mu M^2)^{1/4}, \quad \sigma = \mp \frac{\sqrt{1 - 4\mu M^2}}{M^2(1+P)}$$

Авторы благодарят И. Б. Симоненко за полезное обсуждение работы.

Поступила 28 V 1975



Фиг. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
2. Маркман Г. С., Юдович В. И. Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
3. Маркман Г. С. Устойчивость равновесия слоя жидкости под действием периодического по времени градиента температуры. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
4. Бурдэ Г. И. Численное исследование конвекции, возникающей в модулированном поле внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
5. Бурдэ Г. И. О конечно-амплитудной конвекции, возникающей в модулированном поле тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
6. Маркман Г. С. О возникновении периодических по времени вторичных конвективных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
7. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
8. Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений. Матем. сб., 1972, т. 87, вып. 2.
9. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
10. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, вып. 2. М., «Мир», 1970.
11. Зеньковская С. М. О возникновении гравитационной конвекции в слое жидкости, совершающем высокочастотные вертикальные колебания. В сб. «Математический анализ и его приложения», т. 6. Ростов-на-Дону, Изд-во Ростовск. ун-та, 1974.
12. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
13. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
14. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.