МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1976

УДК 532.135:532.5.011

МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОГО ШАРА В НЕСЖИМАЕМЫХ УПРУГОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ

В. А. ГОРОДЦОВ

(Москва)

В линейной постановке рассмотрены задачи о силе сопротивления и моменте сил, действующих со стороны упруговязкой жидкости на движущийся с ускорением шар. Получены достаточно простые зависимости для жидкости с одним временем релаксации или одним временем последействия. Для жидкости с большим количеством времен дано обсуждение асимптотических формул.

1. Определяющие уравнения жидкости. В линейной теории определяющие уравнения несжимаемой упруговязкой жидкости можно записать в одном из видов [1]

$$\sigma_{ij}'(\mathbf{r},t)=2\rho\int\limits_{-\infty}^{t}\nu(t-t')\,e_{ij}(\mathbf{r},t')\,dt' \tag{1.1}$$

$$e_{ij}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\rho}\int\limits_{-\infty}^{t}\nu^{\circ}(t-t')\,\sigma_{ij}'(\mathbf{r},t')\,dt' \tag{1.2}$$

Здесь $\nu=\nu^0=0$ при $t<t'$, что отражает причинный характер связи между девиаторной частью напряжения σ_{ij}' и скоростью деформации e_{ij}.

Преобразованиями Фурье по времени уравнения (1.1), (1.2) приводятся к алгебраическим

$$\sigma_{ij}'(\mathbf{r},\omega)=2\rho\nu_+(\omega)\,e_{ij}(\mathbf{r},\omega) \tag{1.3}$$

$$\nu_+^{\circ}(\omega)=1/\nu_+(\omega),\quad \nu_+(\omega)=\int\limits_0^{\infty}\nu(t)\,e^{i\omega t}\,dt \tag{1.4}$$

причем благодаря условию причинности интегрирование в обратных преобразованиях Фурье для $\nu(t)$ и $\nu^0(t)$ фактически распространяется только на $t\geqslant0$ и функции $\nu_+(\omega)$, $\nu_+^0(\omega)$ являются аналитическими в верхней полуплоскости комплексного ω. В силу соотношения (1.4) они не имеют там и нулей (подробнее о свойствах $\nu_+(\omega)$ см. в [2]).

В дальнейшем будут обсуждаться следующие частные случаи.

Пример 1. Вязкая жидкость (δ — функция Дирака)

$$\nu(t)=\nu_0\delta(t),\quad \nu_+(\omega)=\nu_0 \tag{1.5}$$

Пример 2. Максвелловская жидкость (h — функция Хевисайда)

$$\nu(t)=\frac{\nu_0}{\theta}e^{-t/\theta}h(t),\quad \nu_+(\omega)=\frac{\nu_0}{1-i\theta\omega} \tag{1.6}$$

Пример 3. Жидкость со временем релаксации θ и временем последействия $\tau<\theta$

$$(1.7)\qquad \nu(t)=\frac{\nu_0}{\theta}\left(1-\frac{\tau}{\theta}\right)e^{-t/\theta}h(t)+\nu_0\frac{\tau}{\theta}\delta(t),\quad \nu_+(\omega)=\nu_0\frac{1-i\tau\omega}{1-i\theta\omega}$$

Пример 4. Жидкость с дискретным спектром времен релаксации ($\theta_1>\theta_2>\ldots$)

$$(1.8)\qquad \nu(t)=\sum_k\frac{\nu_k}{\theta_k}e^{-t/\theta_k}h(t),\quad \nu_+(\omega)=\sum_k\frac{\nu_k}{1-i\theta_k\omega},\quad \nu_0=\nu_+(0)$$

В этих примерах $\lim\limits_{\omega\to0}\nu_+(\omega)=\nu_0<\infty$, $\lim\limits_{\omega\to\infty}\nu_+(\varphi)=\nu_\infty<\infty$, причем ν_∞ принимает значения ν_0, 0, $\nu_0\tau/\theta$, 0 соответственно. Будем для простоты предполагать сначала, что $\nu_+(\omega)$ и в общем случае ограничена.

2. Общая постановка задачи. Рассмотрим задачу о сопротивлении, испытываемом шаром малого радиуса a при его медленных движениях. Поля скоростей и напряжений при линейной постановке удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям прилипания на поверхности шара $|\mathbf{r}|=r=a$:

$$(2.1)\qquad \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{i\alpha}'}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

$$(2.2)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{U}(t)+[\boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{r}],\quad r=a$$

Отсюда видно, что в линейной постановке задача распадается на две независимых. Необходимо найти силу сопротивления $\mathbf{F}(t)$, действующую на шар, движущийся поступательно со скоростью $\mathbf{U}(t)$, и момент сил сопротивления $\mathbf{M}(t)$, возникающий при вращении шара с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}(t)$.

Решим сначала эти задачи для гармонических колебаний $\mathbf{U}(\omega)e^{-i\omega t}$ и $\boldsymbol{\Omega}(\omega)e^{-i\omega t}$, а затем, пользуясь линейностью, перейдем к общему случаю суммированием по всем частотам [3].

3. Сила сопротивления, действующая на колеблющийся шар. В соответствии с (1.3), (2.1) и (2.2) амплитуды при поступательных колебаниях шара удовлетворяют уравнениям

$$(3.1)\qquad -i\omega\mathbf{u}(\mathbf{r},\omega)=-\rho^{-1}\nabla p(r,\omega)+\nu_+(\omega)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},\omega)$$

$$(3.2)\qquad \nabla\mathbf{u}(\mathbf{r},\omega)=0,\quad \mathbf{u}(\mathbf{r},\omega)\big|_{r=a}=\mathbf{U}(\omega)$$

Так как $\mathbf{u}$, p могут зависеть только от двух векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{U}$, причем от $\mathbf{U}$ линейно, то общий вид решения будет

$$(3.3)\qquad p(\mathbf{r},\omega)=p_0+\mathbf{nU}\varphi_0(\mathbf{r}),\quad \mathbf{n}\equiv\mathbf{r}/r$$

$$(3.4)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{n}(\mathbf{nU})\varphi_1(r)+[\mathbf{U}-\mathbf{n}(\mathbf{nU})]\varphi_2(r)$$

и, подставив (3.3), (3.4) в (3.1), (3.2), получим

$$(3.5)\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{2}{r}(\varphi_1-\varphi_2)=0,\quad \varphi_1(a)=\varphi_2(a)=1$$

$$(3.6)\qquad \frac{\partial}{\partial r}[i\omega+\nu_+(\omega)\Delta](\varphi_1+2\varphi_2)=0$$

Интегрирование уравнений с учетом требования ограниченности решений при $r \geqslant a$ приводит к формулам

$$\varphi_1 = \frac{b_1}{r^3} + \frac{b_2}{\lambda r^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda r}\right) e^{\lambda r} \tag{3.7}$$

$$\varphi_2 = -\frac{b_1}{2r^3} + \frac{b_2}{2r}\left(1 - \frac{1}{\lambda r} + \frac{1}{\lambda^2 r^2}\right) e^{\lambda r} \tag{3.8}$$

$$b_1 = a^3\left(1 - \frac{3}{\lambda a} + \frac{3}{\lambda^2 a^2}\right), \quad b_2 = 3ae^{-\lambda a}, \quad \lambda = -\sqrt{-i\omega/\nu_+(\omega)}$$

Здесь следует брать ту ветвь корня $\lambda(\omega)$, для которой $\operatorname{Re}\lambda(\omega) < 0$ (по требованию ограниченности решения).

Из уравнения (3.1) несложно найти $\varphi_0 = -0.5 i\omega\rho b_1/r^2$.

Используя найденные решения, для амплитуды силы получим

$$F_i(\omega) = -6\pi a\rho\left\{\nu_+(\omega) + \frac{i\omega a}{\lambda(\omega)} - \frac{i\omega a^2}{9}\right\} U_i(\omega) \tag{3.9}$$

При $\nu_+(\omega) = \nu_0$ отсюда следует формула сопротивления шара в вязкой жидкости [3]. Наоборот, общая формула получается из вязкого решения заменой ν_0 на $\nu_+(\omega)$ соответственно переходу от определяющего уравнения вязкой жидкости к уравнению (1.3).

4. Сила сопротивления, действующая на произвольно движущийся шар. При переходе к общему случаю с помощью преобразования Фурье удобно выделить множитель $-1/\lambda(\omega)$, преобразование Фурье которого

$$n(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\lambda(\omega)} e^{-i\omega t} \tag{4.1}$$

Аналитически продолжим функцию $1/\lambda(\omega)$ на плоскость комплексного ω с разрезами в нижней полуплоскости, соединяющими точку ветвления $\omega=0$ с другими точками ветвления $1/\lambda(\omega)$. Все особенности находятся ниже вещественной оси в силу аналитических свойств $\nu_+(\omega)$.

Благодаря аналитичности подынтегральной функции в верхней полуплоскости при $t<0$ можно деформировать линию интегрирования в полуокружность неограниченно большого радиуса, интеграл по которой равен нулю, т. е. $n(t)=0$. При $t>0$ деформированием контура в нижней полуплоскости можно свести (4.1) к интегралам по берегам разрезов функции $1/\lambda(\omega)$ (и вычетам в ее полюсах).

Используя то, что $\nu(t)=0$ и $n(t)=0$ при $t<0$, можно записать общую формулу сопротивления следующим образом:

(4.2)

$$\mathbf{F}(t) = -6\pi a\rho\left[\int_{-\infty}^{t} \nu(t-t')\mathbf{U}(t')\,dt' + \frac{a^2}{9}\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} + a\int_{-\infty}^{t} n(t-t')\frac{d\mathbf{U}(t')}{dt'}\,dt'\right]$$

Таким образом, причинным определяющим уравнениям жидкости (1.1) соответствует причинная зависимость силы сопротивления от скорости и ускорения частицы.

Вернемся к примерам п. 1.

Пример 1. Особенности функции $1/\lambda(\omega) = -[-i\omega/\nu_0]^{-1/2}$ исчерпываются двумя точками ветвления ($\omega=0$, $\omega=\infty$), интегралы по разрезу вдоль мнимой оси в нижней полуплоскости вычисляются и для вязкой жидкости имеем хорошо известный результат [3]

$$n(t)=\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}\,h(t) \tag{4.3}$$

Пример 2. Функция $1/\lambda(\omega)=-[-i\omega(1-i\theta\omega)/\nu_0]^{-1/2}$ имеет две точки ветвления, и при $t>0$ интегрирование по берегам разреза по мнимой оси от 0 до $-i/\theta$ дает интегралы, выражающиеся через функцию Бесселя мнимого аргумента $I_0(t/2\theta)$

$$n(t)=\sqrt{\frac{\nu_0}{\theta}}\,e^{-t/(2\theta)}I_0\left(\frac{t}{2\theta}\right)h(t) \tag{4.4}$$

Этот результат получен в работе [4], в которой подробно анализируются следствия для некоторых простых движений шара.

При $t\gg\theta$ асимптотическое разложение функции Бесселя дает

$$n(t)\approx\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}\left(1+\frac{\theta}{4t}+\ldots\right),\qquad t\gg\theta \tag{4.5}$$

Пример 3. В этом случае (4.1) сводится при $t>0$ к интегралам по берегам разрезов $(0,-i/\theta)$, $(-i/\tau,-i\infty)$. После замен переменных интегрирования имеем

$$\begin{gathered}n(t)=\sqrt{\frac{\nu_0}{\theta}}\,\chi_1\left(\frac{t}{\theta},\frac{\tau}{\theta}\right)+\sqrt{\frac{\nu_0}{\tau}}\,\chi_2\left(\frac{t}{\tau},\frac{\theta}{\tau}\right)\\ \chi_k(\alpha,\beta)=\frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_1^{\gamma_k}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\left(\frac{1-\beta\xi}{1-\xi}\right)^{3/2-k}e^{-\alpha\xi},\qquad \gamma_1=0,\ \gamma_2=\infty\end{gathered} \tag{4.6}$$

Отметив, что эти интегралы не выражаются через простые функции $(\chi_1(\alpha,\beta)=\Phi_1(1/2,-1/2,1;\beta,-\alpha)$ – гипергеометрический ряд двух переменных), ограничимся асимптотическими разложениями. При больших t в обоих интегралах главные вклады дают области вблизи нижних концов интегрирования и с точностью до экспоненциально малых членов

$$n(t)\approx\sqrt{\frac{\nu_0}{\theta}}\,\chi_1\left(\frac{t}{\theta},\frac{\tau}{\theta}\right)\approx\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}\left(1+\frac{\theta-\tau}{4t}+\ldots\right),\qquad t\gg\theta \tag{4.7}$$

Пример 4. При спектре из n времен релаксации функция $1/\lambda(\omega)$ имеет $2n$ точек ветвления, лежащих на мнимой оси в нижней полуплоскости ($\omega=0$, n полюсов и $(n-1)$ нулей функции $\nu_+(\omega)$, причем нули лежат между полюсами). Когда $t>0$, интеграл в (4.1) сводится к интегралам по берегам разрезов, соединяющих точки ветвления, причем при $t\gg\theta_1$ все интегралы, кроме первого, экспоненциально малы

$$n(t)\approx\frac{1}{\pi\sqrt{\theta_1}}\int\limits_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\sqrt{\nu_+\left(\frac{-i\xi}{\theta_1}\right)}\,e^{-\xi t/\theta_1},\qquad t\gg\theta_1 \tag{4.8}$$

Поскольку

$$\sum_k\nu_k=\nu_+(0)=\nu_0,\qquad \sum_k\nu_k\theta_k=\theta_1\partial\nu_+(-i\xi/\theta_1)/\partial\xi\,|_{\xi=0}$$

то асимптотическое разложение интеграла можно записать в виде (главный вклад при $\xi \ll 1$)

$$(4.9)\qquad n(t)\approx\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}\left(1+\frac{1}{4\nu_0 t}\sum_k \nu_k\theta_k+\ldots\right),\qquad t\gg\theta_1$$

Первый член отражает вязкий характер затухания при столь больших временах, когда локальные релаксационные процессы полностью заканчиваются. Второй — пропорционален среднему взвешенному по спектру времени релаксации.

До сих пор предполагалось, что $\nu_+(\infty)<\infty$. Однако при наличии времен последействия это, вообще говоря, не так. Необходимое обобщение рассмотрим на примере жидкости с одним временем последействия (общий случай дискретного спектра рассматривается аналогично).

Пример 5. Жидкость с одним временем последействия $\tau>0$

$$(4.10)\qquad \nu(t)=\nu_0\delta(t)+\nu_0\tau\delta'(t),\qquad \nu_+(\omega)=\nu_0(1-i\tau\omega)$$

Интеграл вида (4.1) не существует (в обычном смысле). Вместо него можно ввести функцию

$$(4.11)\qquad n_1(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(1-i\tau\omega)\lambda(\omega)}e^{-i\omega t}$$

с помощью которой получается формула (4.2) с заменой $n(t-t')dU/dt'$ на $n_1(t-t')(1+\tau d/dt')dU/dt'$ в последнем интеграле.

Интеграл $n_1(t)$ совпадает с интегралом $n(t)$ примера 2 с заменой θ на τ. Используя (4.4) для $n_1(t)$, интегрированием по частям формулу для силы сопротивления можно привести к прежнему виду (4.2), понимая теперь под $n(t)$ выражение

$$(4.12)\qquad n(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu_0}{\tau}}e^{-t/(2\tau)}\left[I_0\left(\frac{t}{2\tau}\right)+I_1\left(\frac{t}{2\tau}\right)\right]h(t)$$

При больших t получим асимптотическое разложение

$$(4.13)\qquad n(t)\approx\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}\left(1-\frac{\tau}{4t}+\ldots\right),\qquad t\gg\tau$$

Из сравнения с формулой (4.5) хорошо видна противоположность характера влияния времени последействия и времени релаксации.

5. Момент сил сопротивления, действующих на колеблющийся шар. Распределения $\mathbf{u}$, p около шара, совершающего вращательные колебания вокруг своего диаметра с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(\omega)e^{-i\omega t}$, могут зависеть от вектора $\mathbf{r}$ и псевдовектора $\mathbf{\Omega}(\omega)$, причем от $\mathbf{\Omega}$ при малых скоростях линейно. Поэтому общий вид решения линейных уравнений будет

$$(5.1)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r},\omega)=[\mathbf{\Omega r}]\psi(r),\qquad p(\mathbf{r},\omega)=p_0$$

Условие несжимаемости выполняется автоматически, а уравнение (3.1) и граничные условия дают

$$(5.2)\qquad \psi=\frac{\partial f}{\partial r},\qquad \frac{\partial}{\partial r}[i\omega+\nu_+(\omega)\Delta]f=0,\qquad \psi(a)=1,\ \psi(\infty)=0$$

Отсюда находим $\psi(r)=\chi(r)/\chi(a)$, $\chi(r)=r^{-2}(\lambda r-1)e^{\lambda r}$, а для момента сил получим

$$M_i(\omega)=\int\limits_{r=a} dS\varepsilon_{i\alpha\beta}n_\alpha\sigma_{\beta\gamma}'(r,\omega)r_\gamma=-8\pi a^3\rho\left[\nu_+(\omega)-\frac{i\omega a^2/3}{1-a\lambda(\omega)}\right]\Omega_i(\omega) \tag{5.3}$$

Формула с точностью до замены ν_0 на $\nu_+(\omega)$ совпадает с соответствующей формулой для вязкой жидкости (см. [3]).

6. Момент сил сопротивления, действующих на произвольно вращающийся шар. Для перехода к общему случаю с помощью преобразования Фурье удобно ввести функцию

$$m(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1-a\lambda(\omega)}e^{-i\omega t} \tag{6.1}$$

Свойства ее во многом аналогичны свойствам функции $n(t)$ из п. 4. Продолжим аналитически функцию $[1-a\lambda(\omega)]^{-1}$ на плоскость комплексного ω с разрезами в нижней полуплоскости. В силу выбора той ветви, для которой $\mathrm{Re}\lambda(\omega)<0$, знаменатель подынтегрального выражения в нуль не обращается и, следовательно, все особенности исчерпываются особенностями $\lambda(\omega)$. Благодаря аналитичности $\lambda(\omega)$ в верхней полуплоскости $m(t)=0$ при $t<0$. При $t>0$ можно свести интеграл (6.1) к интегралам по берегам разрезов, соединяющих точки ветвления функции $\lambda(\omega)$.

Общую формулу для момента сил, получающуюся из (5.4) с помощью преобразования Фурье, можно записать в виде

$$M(t)=-8\pi a^3\rho\left[\int\limits_{-\infty}^{t}\nu(t-t')\Omega(t')dt'+\frac{a^2}{3}\int\limits_{-\infty}^{t}m(t-t')\frac{d\Omega(t')}{dt'}dt'\right] \tag{6.2}$$

Пример 1. В вязкой жидкости при $t>0$ интеграл (6.1) сводится к интегралам вдоль мнимой оси в нижней полуплоскости, вычисляющимся в явном виде

$$m(t)=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}-\frac{\nu_0}{a^2}e^{\nu_0 t/a^2}\,\mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{\nu_0 t}{a^2}}\right),\qquad t>0 \tag{6.3}$$

Отсюда при больших временах следует:

$$m(t)\approx\frac{a}{2\sqrt{\pi\nu_0}}t^{-3/2}\left(1-\frac{3a^2}{2\nu_0 t}+\dots\right),\qquad t\gg a^2/\nu_0 \tag{6.4}$$

Пример 2. При $t>0$ интеграл (6.1) сводится к интегралам по берегам разреза $(0,-i/\theta)$ и после замены переменных имеем

$$m(t)=\frac{a}{\pi\theta\sqrt{\nu_0\theta}}\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{1+(a^2/\nu_0\theta)\xi(1-\xi)}e^{-\xi t/\theta}d\xi,\qquad t>0 \tag{6.5}$$

Такой интеграл, вообще говоря, через простые функции не выражается. Однако после некоторых преобразований получим

(6.6)

$$m(2\theta x)=\frac{\sqrt{\nu_0/\theta}}{4ab}e^{-x}[2\,\mathrm{ch}(bx)\,\mathrm{Ie}_{-1}(b,\infty)+e^{-bx}\,\mathrm{Ie}_{-1}(-b,x)-e^{bx}\,\mathrm{Ie}_{-1}(b,x)]h(x)$$

Здесь $\mathrm{Ie}_{-1}(\pm b, x)$ — неполный интеграл Липшица — Ханкеля по терминологии книги [5], который можно выразить через $\mathrm{Ie}_0(\pm b, x)$ и функции Бесселя $I_0(x)$, $I_1(x)$. Эти интегралы можно затем выразить через функции Ломмеля двух переменных, для которых имеются численные таблицы

$$\mathrm{Ie}_\nu(\pm b, x) \equiv \int_0^x I_\nu(\xi)\,\xi^\nu e^{\mp b\xi} d\xi, \qquad b^2 \equiv 1+4\nu_0\theta/a^2 \tag{6.7}$$

Рассмотрим асимптотику интеграла (6.5) при больших t, когда главный вклад дает область у нижнего предела

$$m(t) \approx \frac{a}{2\sqrt{\pi\nu_0}} t^{-3/2}\left[1-\left(\theta+\frac{2a^2}{\nu_0}\right)\frac{3}{4t}+\ldots\right], \qquad t \gg \theta,\ a^2/\nu_0 \tag{6.8}$$

Если время релаксации θ гораздо меньше времени вязкой релаксации a^2/ν_0, то это разложение сводится к (6.4).

Пример 4. С точностью до экспоненциально малых членов при $t>0$

$$m(t) \approx \frac{a}{\pi\theta_1^{3/2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi/\nu_+(-i\xi/\theta_1)}}{1+\xi a^2/\theta_1\nu_+(-i\xi/\theta_1)} e^{-\xi t/\theta_1} d\xi, \qquad t \gg \theta_1 \tag{6.9}$$

а этот интеграл имеет асимптотическое разложение (при $t \gg \theta_1$, a^2/ν_0)

$$m(t) \approx \frac{a}{2\sqrt{\pi\nu_0}} t^{-3/2}\left[1-\left(2a^2+\sum_k \nu_k\theta_k\right)\frac{3}{4\nu_0 t}+\ldots\right] \tag{6.10}$$

Главный член асимптотики имеет вязкий характер.

7. Условия медленности движения и малости частиц. При выводе предыдущих формул использовались линейные уравнения. Обсудим качественные условия возможности такой линеаризации в случае жидкости с одним временем релаксации, который обладает наибольшей простотой и определенностью.

При движениях частицы, близких к равномерным, условия малости нелинейных конвективных членов как в динамических, так и в определяющих уравнениях имеют простой вид

$$\mathrm{Re} \equiv aU/\nu \ll 1, \quad \mathrm{Ws} \equiv \theta U/a \ll 1 \tag{7.1}$$

Для вращающейся частицы в этих условиях следует понимать под U величину $a\Omega$. При заданном диаметре частицы они дают ограничение на ее скорость $U \ll \nu_0/a$, a/θ, а при заданной скорости – на радиус $\theta U \ll a \ll \nu_0/U$. Отметим еще, что при этих условиях отношение $a^2/\nu_0\theta$ остается достаточно произвольным, а очевидное следствие $U^2 \ll \nu_0/\theta$ автоматически приводит к малости нелинейных по напряжениям членов.

Если ускорения частицы не малы, то условия значительно меняются. Проиллюстрируем это для быстро меняющихся движений, для больших частот колебаний ($\omega \gg 1/\theta$, ν_0/a^2). В этом случае условия малости конвективных членов по сравнению с линейной инерционной частью следующие: $U \ll \omega a$ или $\mathrm{Re} \ll \omega a^2/\nu_0$, $\mathrm{Ws} \ll \theta\omega$. Эти ограничения слабее (7.1). Однако, вообще говоря, ими не исчерпываются все условия. Когда имеет место $U \ll \omega a$ нелинейные по напряжениям члены автоматически малы ($\sigma \ll \nu/\theta$), но необходима также малость членов типа $(\partial\sigma/\partial t)^2$ и т. п. Это приводит снова к условию (7.1).

Наконец, еще одно ограничение связано с тем, что пренебрегается смещением частицы при изменении ее скорости. При быстрых изменениях условием малости смещения за характерное время $1/\omega$ по сравению с радиусом частицы будет $U \ll \omega a$. При медленных изменениях характерным временем является $2\rho_0 a^2/(9\rho\nu)$, и тогда необходимо $\mathrm{Re} \ll 4.5\ \rho/\rho_0$ (ρ_0, ρ – плотности частицы и жидкости соответственно).

В заключение отметим, что полученные решения можно использовать при исследовании медленных движений шара в таких упруговязких жидкостях с большими временами релаксации, как растворы и расплавы высокомолекулярных веществ. В литературе имеются отдельные работы, в которых неустановившееся движение шара использовалось для оценки релаксационных параметров жидкости [6, 7]. Кроме того, как показывают недавние исследования [8], учет характеристик типа времени релаксации очень важен для теории броуновского движения в низкомолекулярных жидкостях. В этом случае полученные решения линейной задачи можно использовать благодаря малости броуновских частиц.

Поступила 19 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gross B.* Mathematical structure of the theories of viscoelasticity. Paris, Hermann, 1953.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Lai R. Y. S.* Drag on a sphere accelerating rectilinearly in a Maxwell fluid. Internat. J. Engng Sci., 1974, vol. 12, No. 7.
5. *Агрест М. М., Максимов М. З.* Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М., Атомиздат, 1965.
6. *Hwang S. H., Litt M., Forsman W. C.* Rheological properties of mucus. Rheol. Acta, 1969, vol. 8, No. 4.
7. *Waters N. D., King M. J.* Unsteady flows in elastico-viscous liquids. Rheol. Acta, 1973, vol. 12, No. 2.
8. *Chow T. S.* Viscoelastic effect on the velocity autocorrelation function. J. Chem. Phys., 1974, vol. 61, No. 7, pt 2.