

## ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

А. В. ГОРИН, М. И. ШИЛЯЕВ

(Томск)

Рассматривается аналитическое решение задачи о ламинарном трехмерном течении жидкости между двумя вращающимися, одним вращающимся и одним неподвижным дисками с учетом начальной закрутки потока на входе.

Аналогичное течение исследовалось в [1-6]. В [1] при решении уравнений Навье - Стокса пренебрегалось всеми членами инерционных сил, являющимися, однако, по отношению к оставшимся членам величинами сравнимого порядка [2]. В [2] удалось найти приближенное решение с частичным учетом инерционных членов. В [3] приведено решение в виде конечного ряда для радиально вытекающего потока, в котором отбрасывались все члены полного решения, за исключением первых трех. В [4] решение получено в виде усеченного ряда, точность которого зависит от параметра  $\lambda$ , определяемого отношением произведения угловой скорости вращения на квадрат полуширины зазора между дисками к кинематической вязкости, и расчетного радиуса. В [5] для радиально втекающего и в [6] для радиально вытекающего потоков приводятся решения, полученные методом итераций, причем начальное решение соответствует решению для «ползущего» движения жидкости.

В приведенных работах особо не оговариваются условия входа среды в междисковое пространство и не рассматривается влияние начальной закрутки потока на развитие течения по радиусу вращающегося элемента.

Ниже для относительно малых зазоров между дисками использован метод Слезина - Тарга [7], дающий возможность учесть все инерционные члены уравнений движения в интегральной форме. Анализ полученных составляющих скоростей позволяет найти протяженность участка, на котором начальная закрутка существенно проявляется на параметрах течения среды в междисковом пространстве, и провести контроль решения сравнением средних по зазору окружной составляющей скорости среды, найденной из гидравлических представлений течения и из решения уравнений Навье - Стокса.

**1. Постановка задачи.** Течение полагается установившимся, симметричным относительно оси, нормальной к плоскости дисков, и центральной плоскости между дисками. В предположении относительной малости зазора между дисками ( $\delta \ll R_i$ ) в уравнениях Навье - Стокса сохранены лишь те вязкие члены, которые имеют порядок  $R_i^2/\delta^2$ . В этом случае исходная система уравнений в цилиндрических координатах и граничные условия в безразмерной форме запишутся в виде

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{dp}{dr}$$

$$(1.1) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} = v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$v_r(r, \pm 1) = v_z(r, \pm 1) = 0, \quad v_\varphi(r, \pm 1) = r$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial v_r}{\partial r}(r, 0) = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}(r, 0) = v_z(r, 0) = 0, \quad p(r_i) = p_i = \text{const}$$

$$v_r = W_r / \omega R_i, \quad v_\varphi = W_\varphi / \omega R_i, \quad v_z = W_z / \omega \delta, \quad r = R / R_i, \quad z = Z / \delta$$

$$p = P / \rho \omega^2 R_i^2, \quad p_i = P_i / \rho \omega^2 R_i^2, \quad \lambda = \omega \delta^2 / \nu, \quad L = q / 4\pi \omega R_i^2 \delta$$

Условие постоянства расхода и начальную закрутку представим в виде

$$(1.3) \quad r \int_0^1 v_r(r, z) dz = L = \text{const}, \quad V_0 = \int_0^1 v_\varphi(1, z) dz$$

Здесь  $W_r, W_\varphi, W_z$  — радиальная, окружная и осевая составляющие скорости;  $q$  — объемный расход жидкости через зазор;  $P, P_i$  — давление жидкости на радиусе  $R, R_i$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и внешний радиусы кольцеобразных дисков;  $2\delta$  — ширина зазора между дисками;  $\nu, \rho$  — кинематическая вязкость и плотность жидкости;  $Z$  — осевая координата. Индекс  $i=1$  соответствует радиально вытекающему ( $L>0$ ) и  $i=2$  — втекающему ( $L<0$ ) потокам.

**2. Решение системы уравнений.** Вследствие симметричности течения относительно середины щели достаточно рассмотреть движение жидкости только для  $0 \leq z \leq 1$ . Для решения краевой задачи (1.1) — (1.3) воспользуемся методом Слезкина — Тарга [7], который позволяет учесть влияние всех инерционных членов в интегральной форме. Заменим ускорение, стоящее в левой части второго уравнения системы (1.1), его средним значением по зазору между дисками. Тогда рассматриваемое уравнение можно представить в виде

$$(2.1) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} = B(r)$$

$$(2.2) \quad B(r) = \int_0^1 \left( v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) dz$$

Интегрируя (2.1) дважды по  $z$  с учетом граничных условий (1.2), получим

$$(2.3) \quad v_\varphi = r + \frac{1}{2} \lambda B (z^2 - 1)$$

В качестве первого приближения положим, что  $v_z = 0$ , а радиальная скорость распределяется по координате  $z$  по параболическому закону. Тогда из уравнения неразрывности системы (1.1) находим

$$(2.4) \quad v_r = A(z) / r, \quad A(z) = \frac{3}{2} L (1 - z^2)$$

Подставляя (2.3), (2.4) в (2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $B$ , из решения которого следует, что

$$(2.5) \quad B(r) = \frac{3}{r\lambda} [\Phi + (1 - V_0 - \Phi) e^{\beta(r^2 - 1)}] \quad \left( \Phi = \frac{2}{3} L \lambda = \frac{2}{3} \frac{U_{r1}}{\nu} \frac{\delta^2}{R_i}, \quad \beta = -\frac{5}{6\Phi} \right)$$

Здесь  $\Phi$  — расходно-геометрический параметр,  $U_{r1}$  — среднерасходная радиальная скорость газа на радиусе  $R_i$ .

Найдем распределение давления по радиусу дисков и вторые приближения для составляющих скорости  $v_r$  и  $v_z$ . Для чего подставим  $v_z = 0$  и  $v_\varphi$ ,  $v_r$  из (2.3) и (2.4) в правую часть первого уравнения системы (1.1) и

дважды проинтегрируем по  $z$  с учетом граничных условий (1.2)

$$(2.6) \quad v_r = \lambda \left[ \left( \frac{9L^2}{8r^3} + \frac{B^2\lambda^2}{8r} \right) \left( \frac{z^6}{15} - \frac{z^4}{3} + z^2 - \frac{11}{5} \right) + r \frac{z^2-1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{B\lambda}{2} \left( \frac{z^4}{6} - z^2 + \frac{5}{6} \right) \right] + \lambda \frac{dp}{dr} \frac{z^2-1}{2}$$

Градиент давления определим из уравнения неразрывности после интегрирования его по  $z$  от 0 до 1 с учетом (1.3)

$$(2.7) \quad \frac{dp}{dr} = \frac{6}{35} \left( \frac{9L^2}{r^2} + B^2\lambda^2 \right) \frac{1}{r} + r - \frac{4}{5} B\lambda - \frac{3L}{\lambda r}$$

и, следовательно,  $v_r$  запишется в окончательном виде

$$(2.8) \quad v_r = -\frac{3L}{r} \frac{z^2-1}{2} - \frac{\lambda}{8r} \left( \frac{9L^2}{r^2} + B^2\lambda^2 \right) \left( \frac{z^6}{15} - \frac{z^4}{3} + \frac{11}{35} z^2 - \frac{1}{21} \right) - \\ - \frac{B\lambda^2}{2} \left( \frac{z^4}{6} - \frac{z^2}{5} + \frac{1}{30} \right)$$

Осевую составляющую  $v_z$  найдем из уравнения неразрывности, подставляя в него  $v_r$  из (2.8) и интегрируя по  $z$  от 0 до  $z$

$$(2.9) \quad v_z = -\frac{\lambda}{12r} \left( \frac{9L^2}{r^3} - \lambda^2 B \frac{dB}{dr} \right) \left( \frac{z^7}{35} - \frac{z^5}{5} + \frac{11}{35} z^3 - \frac{z}{7} \right) + \\ + \frac{\lambda^2}{60} \left( \frac{dB}{dr} + \frac{B}{r} \right) (z^5 - 2z^3 + z)$$

Интегрируя уравнение (2.7) по  $r$  с учетом (1.2), для поля давления получим выражение

$$(2.10) \quad p = p_i - 3 \frac{L}{\lambda} \left( 1 - \frac{8}{15} \lambda^2 \right) \ln r + \frac{r^2-1}{2} - \frac{27}{35} \Phi^2 \left( \frac{9}{4\lambda^2} + 1 \right) \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) - \\ - \frac{27}{35} (1 - V_0 - \Phi) \left\{ 2\Phi \left( \frac{e^{\beta(r^2-1)}}{r^2} - 1 \right) + \left( \frac{e^{2\beta(r^2-1)}}{r^2} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} e^{-\beta} [\text{Ei}(\beta r^2) - \text{Ei}(\beta)] - 2(1 - V_0 - \Phi) \beta e^{-2\beta} [\text{Ei}(2\beta r^2) - \text{Ei}(2\beta)] \right\}$$

Анализ уравнений (2.3), (2.8) – (2.10) показывает, что второе слагаемое в выражении (2.5) для  $B(r)$  при определенных условиях оказывает существенное влияние на поле скоростей лишь во входной области междискового пространства. Это слагаемое характеризует влияние входных параметров. Далее, в асимптотической области течения, это влияние практически несущественно. Поэтому выражения для составляющих скорости и давления значительно упрощаются в соответствии с тем, что  $B(r) \approx 2L/r$ . Длину участка, на котором существенно влияние входных параметров, определим из условия, чтобы второе слагаемое было меньше, чем  $0.01 \Phi$

$$r_a = \sqrt{1 + \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{0.01\Phi}{1 - V_0 - \Phi} \right|}$$

**3. Среднеинтегральная окружная скорость жидкости.** Среднюю окружную скорость жидкости по зазору можно получить, пользуясь гидравлическим представлением установившегося несжимаемого потока при лами-

нарном режиме течения как в плоской щели, полагая коэффициент трения функцией числа Re в виде

$$(3.1) \quad \lambda_m = C \operatorname{Re}^{-1}, \operatorname{Re} = \sqrt{(\omega R - U_\varphi)^2 + U_r^2} 4\delta / \nu$$

Приравнявая изменение момента количества движения моменту сил трения жидкости о диски по окружной составляющей, получим дифференциальное уравнение для определения средней скорости  $U_\varphi(r)$  (например, для радиального течения от периферии к оси) вида

$$(3.2) \quad \frac{dy}{dr} + \theta yr = \theta r^3, \quad y = u_\varphi r$$

$$\theta = \frac{C \pi \nu R_2^2}{8q\delta}, \quad u_\varphi = \frac{U_\varphi}{\omega R_2}, \quad r = \frac{R}{r_2}$$

решение которого при граничном условии  $r=1, y=V_0$  дает следующее распределение средней по высоте зазора окружной скорости жидкости:

$$(3.3) \quad u_\varphi = r - \frac{1}{r} \left[ \Phi_1 + (1 - V_0 - \Phi_1) \exp\left(\frac{1-r^2}{\Phi_1}\right) \right] \quad (\Phi_1 = 2/\theta)$$

Получим среднеинтегральное значение окружной скорости жидкости по зазору, пользуясь распределением (2.3)

$$(3.4) \quad u_\varphi = \int_0^1 v_\varphi(r, z) dz = r - \frac{1}{r} \left[ \Phi - (1 - V_0 - \Phi) \exp\left(\frac{5}{6} \frac{1-r^2}{\Phi}\right) \right]$$

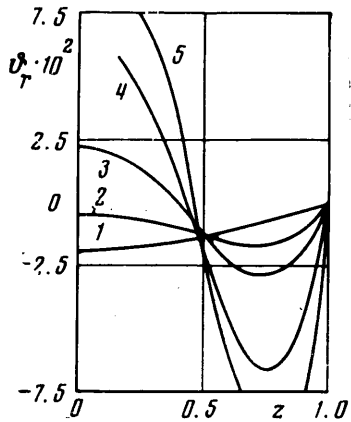
Сравнивая выражения (3.3) и (3.4), находим, что они совпадают по структуре и отличаются незначительно только коэффициентом в показателе экспоненты. Заметим, что выражение (3.3) полностью совпадает с (3.4), если в качестве первого приближения положить  $v_z=0, v_r=L/r$ , расчетные же значения составляющих скоростей второго приближения практически не отличаются от значений, вычисленных по формулам (2.3), (2.8), (2.9). Приравнявая  $\Phi$  величине  $\Phi_1$ , найдем постоянную в зависимости (3.1) для коэффициента трения  $\lambda_m$  при ламинарном течении среды между вращающимися дисками  $C=96$ , что соответствует коэффициенту в законе трения для ламинарно движущейся среды в щелевом канале с бесконечным отношением длины к поперечнику.

**4. Ламинарное движение среды между вращающимися и неподвижным дисками.** Для решения поставленной задачи будем пользоваться той же исходной системой уравнений движения (1.1) при следующих граничных условиях:

$$(4.1) \quad v_r(r, 0) = v_z(r, 0) = v_\varphi(r, 0) = 0; \quad v_r(r, 1) = v_z(r, 1) = 0$$

$$v_\varphi(r, 1) = r p(r_i) = p_i = \text{const}$$

условии постоянства расхода и закрутки среды на ободе вращающегося диска (1.3). Здесь  $\delta$  — ширина всего зазора, причем  $z=1$  на плоскости вращающегося диска и  $z=0$  на плоскости неподвижного диска.



Фиг. 1

В качестве первого приближения в соответствии с особенностями несимметричного течения по высоте щели и с учетом уравнения неразрывности и граничных условий положим  $v_z=0$  и  $v_r=6L(1-z)z/r$ . Применяя метод Слезкина — Тарга для выражения конвективной части ускорения через ее среднеинтегральное значение по высоте зазора в форме (2.2), из системы уравнений (1.1) и условий (1.3), (4.1) получим распределение скоростей и давления во втором приближении

$$(4.2) \quad v_\varphi = rz + \frac{1}{r} \{ \alpha_1 + [6(1-2V_0) - \alpha_1] e^{\beta(r^2-1)} \}$$

$$(4.3) \quad v_r = \frac{6L}{r} z(1-z) - \frac{\lambda r}{60} (5z^4 - 9z^2 + 4z) - \frac{\lambda}{1680r} \left( \frac{144L^2}{r^2} + B^2\lambda^2 \right) \times \\ \times (14z^6 - 42z^5 + 35z^4 - 9z^2 + 2z) - \frac{\lambda^2 B}{60} (3z^5 - 5z^4 - 3z^2 - z)$$

$$(4.4) \quad v_z = \frac{\lambda}{30} (z^5 - 3z^3 + 2z^2) - \frac{\lambda}{840r} \left( \frac{144L^2}{r^3} - \lambda^2 B \frac{dB}{dr} \right) (2z^7 - 7z^6 + \\ + 7z^5 - 3z^3 + z^2) + \frac{\lambda^2}{120} \left( \frac{dB}{dr} + \frac{B}{r} \right) (z^6 - 2z^5 + 2z^3 - z^2)$$

$$(4.5) \quad p = p_i - \Lambda_1 \ln r - \Lambda_2 \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) + \frac{3}{20} (r^2 - 1) - \Lambda_3 \left( \frac{e^{\beta r^2}}{r^2} - e^\beta \right) - \\ - \Lambda_4 \left( \frac{e^{2\beta r^2}}{r^2} - e^{2\beta} \right) + \Lambda_5 [Ei(\beta r^2) - Ei(\beta)] + \Lambda_6 [Ei(2\beta r^2) - Ei(2\beta)]$$

$$\Lambda_1 = \frac{12L}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{10}, \quad \Lambda_2 = \frac{27L^2}{35} + \frac{3\alpha_1^2}{560}, \quad \Lambda_3 = \frac{3}{280} \alpha_1 \alpha_2, \quad \Lambda_4 = \frac{3}{560} \alpha_2^2$$

$$\Lambda_5 = \Lambda_3 \beta - \frac{\alpha_2}{20}, \quad \Lambda_6 = 2\Lambda_4 \beta, \quad \alpha_1 = L\lambda, \quad \alpha_2 = [6(1-2V_0) - L\lambda] e^{-\beta}$$

$$\beta = -5/\alpha_1, \quad L = q/2\pi\omega R_i^2 \delta, \quad \lambda = \omega \delta^2/\nu, \quad B(r) = \frac{1}{r\lambda} \{ L\lambda + [6(1-2V_0)] e^{\beta(r^2-1)} \}$$

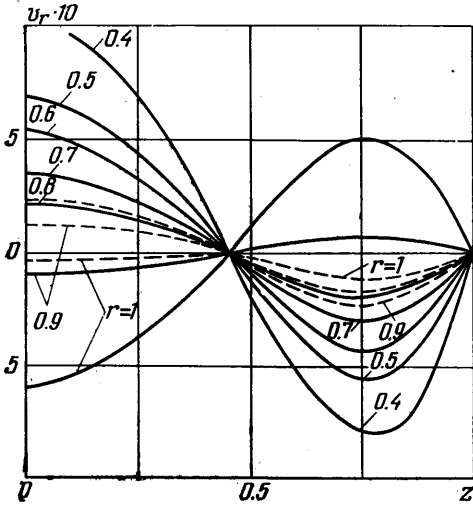
где  $Ei(\beta r^2)$  и  $Ei(2\beta r^2)$  — интегрально-показательные функции.

**3. Результаты расчетов.** Ниже приведены результаты расчетов составляющих скоростей газа (воздуха) между вращающимися (фиг. 1–4), одним вращающимся и одним неподвижным (фиг. 5) дисками для типичных параметров работы дискового ротора центробежного пылеотделителя и его противопылевого уплотнения [8].

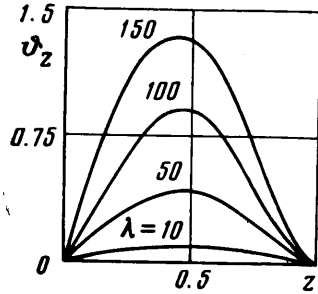
На фиг. 1 ( $L = -8.12 \cdot 10^{-3}$ ,  $r = 0.8$ ) представлены распределения радиальной составляющей скорости по  $z$  в зависимости от параметров  $\lambda$  (кривые 1–5 соответствуют значениям  $\lambda = 1.3, 5.2, 11.8, 20.5, 32.7$ ). Из фиг. 1 следует, что при наибольших значениях  $\lambda$  эпюра радиальных скоростей однонаправлена и незначительно отличается от параболической. Однако с увеличением  $\lambda$  весь поток разделяется на два пристенных и один центральный. Скорость пристенных потоков с ростом  $\lambda$  увеличивается, а их толщина уменьшается. При этом, начиная с некоторого  $\lambda$ , направление центрального потока становится противоположным. В асимптотической области, когда  $B(r) \approx 2L/r$ , критическое значение  $\lambda$ , отвечающее началу разнонаправленного движения, равно  $\sqrt{45}$ , что легко можно получить из выражения для радиальной скорости (2.8).

Как показывают расчеты, с ростом  $|\Phi|$  эпюра радиальной скорости стремится к форме параболы и профиль становится однонаправленным. Однако надо иметь в виду, что при больших значениях  $\Phi$  и  $\lambda$  расчетные зависимости для выражения составляющих скоростей (2.3), (2.8), (2.9) уже не будут отвечать реальному тече-

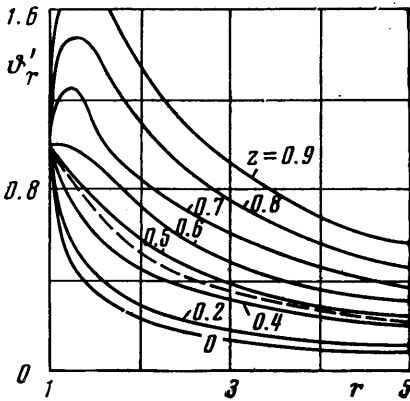
нию вследствие его турбулизации. Из графика фиг. 1 можно сделать заключение о выравнивании профиля радиальной скорости среды по ширине щели при турбулентном режиме движения и его приближении к среднерасходному и о стремлении осевой составляющей к нулю. Действительно, турбулизация потока в междисковом пространстве приводит к увеличению эффективной вязкости, равной сумме турбу-



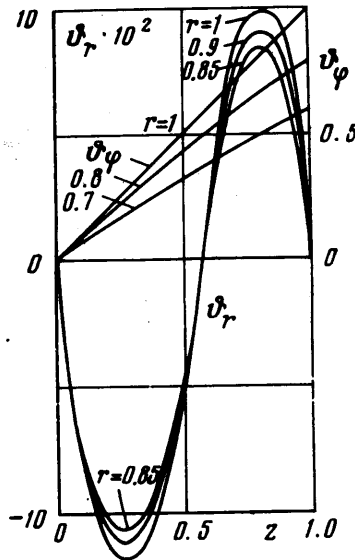
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

лентной  $\epsilon_T$  и молекулярной  $\nu$ , а соответственно, к значительному уменьшению эффективного значения  $\lambda = \omega \delta^2 / (\epsilon_T + \nu)$ , поскольку для развитого турбулентного течения в ядре потока  $\epsilon_T \gg \nu$ . Этот же результат непосредственно следует для ядра потока из дифференциальных уравнений системы (1.1): при  $\lambda \rightarrow 0$   $\partial^2 v_r / \partial z^2 \rightarrow 0$ ,  $\partial^2 v_\phi / \partial z^2 \rightarrow 0$  и при условии симметрии (1.2)  $v_r \rightarrow \text{const}$ ,  $v_\phi \rightarrow \text{const}$ .

На фиг. 2 ( $\lambda = 50$ ,  $\Phi = -0.1$ ) представлено изменение радиальной скорости по радиусу при различных закрутках потока газа на входе:  $V_0 = 0.5$  (сплошные кривые),  $V_0 = 1$  (пунктирные кривые). Как следует из приведенных графиков, при движении газа к оси профиль радиальной скорости сильно деформируется и вытягивается и в то же время стирается различие между профилями с разными закрутками среды на входе. Так, например, для данного графика при  $r = 0.8$  наблюдается уже слабое различие в профилях для  $V_0 = 0.5$  и 1 и полное совпадение при  $r = 0.7$ .

На фиг. 3 ( $\Phi = -0.1$ ,  $r = 0.8$ ) приведены в качестве иллюстрации профили осевых скоростей для различных значений параметра  $\lambda$ . Из графиков видно, что при  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $v_z \rightarrow 0$ .

На фиг. 4 для радиально вытекающего потока ( $L = 0.11$ ,  $V_0 = 1$ ,  $\lambda = 5.23$ ) показано изменение радиальной составляющей скорости  $v_r(r, z)$ , отнесенной к ее значению на

входе  $v_r(r_1, z)$  ( $\bar{v}_r = v_r(r, z)/v_r(r_1, z)$ ). Пунктиром для сравнения изображено изменение среднерасходной скорости.

На фиг. 5 ( $v_0=0.5$ ,  $L=0.01415$ ,  $\lambda=13.89$ ) представлены радиальные и окружные скорости среды, текущей между неподвижным и вращающимся дисками. Из графика следует, что окружные скорости практически могут быть с достаточной точностью описаны линейной зависимостью. Вблизи плоскости вращающегося диска за счет центробежных сил газ приобретает по радиусу направление движения, противоположное направлению основного потока.

Вид эпюр осевых скоростей и их зависимость от параметров  $\lambda$  и  $\Phi$  аналогичны виду эпюр и их зависимостям от тех же параметров для течения газа (жидкости) между двумя вращающимися дисками.

Поступила 30 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдин Е. М. Устойчивость потока между тарелками сепаратора. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
2. Лысковцов И. В. Разделение жидкостей на центробежных аппаратах. М., «Машиностроение», 1968.
3. Kreith F., Peube J.-L. Ecoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques paralleles. J. Mecanique, 1966, vol. 5, No. 2.
4. Savage S. B. Laminar Radial flow between parallel plates. Trans. ASME, ser. E. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 4.
5. Matsch L., Rice W. An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 3. (Рус. перев. Матч, Райс. Асимптотическое решение для ламинарного течения несжимаемой жидкости между вращающимися дисками. Тр. америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, Прикл. механ., 1968, т. 35, № 3.)
6. Мисюра В. И. Ламинарное течение несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками. Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 5.
7. Слезкин Н. А., Тарг С. М. Обобщенные уравнения Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1946, т. 54, № 3.
8. Шваб В. А., Шилляев М. И. Центробежный безнапорный пылеотделитель и метод его расчета. В сб. «Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов», Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1972.