МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1976

УДК 532.517
532.5:621.22

# ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНЫХ СЛЕДОВ ЗА ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЛОПАСТЯМИ ВИНТОВ

Р. РАДЖ, Д. ЛАМЛИ

*(США)*

Проведено теоретическое исследование осредненных и пульсационных характеристик турбулентных следов за вращающимися винтами. Получены приближенные аналитические решения, определяющие профили скоростей в радиальном и осевом направлениях, а также их затухание со временем. Дана оценка относительной величины различных турбулентных характеристик. Представлено необходимое физическое обоснование для понимания и постановки задачи.

**1. Введение.** Знание характеристик затухания осредненных и пульсационных величин в следах за вращающимися лопастями имеет широкий спектр важных научных и инженерных приложений, как-то: улучшение конструкции лопаток, исследование механизмов генерации шумов, прогноз характеристик шумов, а также, возбужденных колебаний лопастей во вращающихся гидромашинах. Недостаток таких сведений мешает развитию исследований в области акустики и при нестационарном аэродинамическом анализе работы ступеней ротора турбомашины. Течение в следе за вращающимися в осевом потоке лопастями и в турбомашинах из-за сложного характера проблемы продолжает оставаться наимение изученным явлением. При его теоретическом и экспериментальном исследовании возникает очень много трудностей. Поле течения за ротором существенно трехмерное, анизотропное и турбулентное. Кроме того, оно зависит от большого числа параметров, таких, как величины радиального и осевого градиентов давления, скорость вращения, расположение лопастей и их геометрия, уровень турбулентности в окружающем потоке и расстояние от задней кромки.

На качественную зависимость между вибрациями лопастей и следом в осевых турбодвигателях впервые было указано в [1]. Однако никаких экспериментальных данных и теоретической постановки задачи о следе за винтами в этой заметке не приводилось и не предлагалось. В работе [2] описан теоретический метод оценки геометрии следа за ротором вертолета. В этой работе исследование проводилось на основе численного интегрирования уравнений и использования закона Био-Савара. При этом, однако, предполагалось, что след за ротором имеет форму тонкой вихревой пелены, что весьма сомнительно, так как из-за турбулентности и смешения с окружающим потоком вихревая пелена свертывается в грубое подобие клина или параболоид, что имеет большое значение при определении турбулентной структуры следа и потерь энергии на смешение. Прикидочное применение метода работы [2] показало значительное искажение геометрии следа.

Существующая литература по трехмерным следам имеет весьма небольшое отношение к следам за винтами. В работах [3, 4], однако, содержатся некоторые общие сведения, которые можно использовать для создания модели следа за ротором. В работе [3] выделяются три области течения за плохо обтекаемыми телами, а именно:

а) область большой неоднородности (анизотропии) течения, простирающаяся за телом до расстояния, равного примерно 50 его диаметрам. Возникающая турбулентность обязана своим происхождением телу;

б) область почти изотропная, расположенная на расстоянии от 100 до ~400 диаметров. Эта область, где существует приближенное подобие, и изотропные соотношения справедливы для оценки затухания;

в) область сильной перемежаемости, существующая на расстояниях, больших 400 диаметров; процесс вырождения переходит в заключительную стадию.

В работе [4] исследованы трехмерные следы с начальным эксцентриситетом. Сообщается о следующих теоретических выводах:

а) след с произвольным начальным эксцентриситетом вырождается в симметричную конфигурацию с соответствующим законом затухания;

б) если два следа соответствуют одинаковым условиям полета, имеют одинаковую начальную скорость на оси и одинаковое сопротивление, то след с бо́льшим начальным эксцентриситетом будет затухать более быстро.

В данной работе представлен предварительный систематический анализ характеристик затухания осредненных и пульсационных величин следа за лопастями в осевом потоке. В п. 3 этой работы предлагается модель течения, указаны основные уравнения и получено приближенное решение для определения осредненных и пульсационных характеристик в аксиальном следе за лопастью. В п. 4 сделан ряд выводов и обсуждаются результаты теоретического исследования.

**2. Характерные черты и классификация следа за лопастью.** След за лопастью, в отличие от следа за решеткой или за изолированным профилем по своей природе трехмерный. Во вращающейся системе координат единственная разница между ротором и решеткой заключается в радиальной геометрии лопасти и в неинерциальности системы [1]. Если отношение радиуса основания лопасти к ее длине велико, влияние радиальной геометрии незначительно, и эффект трехмерности, который нас интересует, вызывается неинерциальностью системы. Это искажение следа играет значительную роль в изменении пульсационных характеристик следа, что косвенно влияет на расширение следа и его затухание.

След за лопастью, как и след за решеткой и за изолированным профилем, в общем случае несимметричный. Асимметричность вызвана нагруженностью лопасти. Дальше вниз по потоку след от одной вращающейся лопасти может взаимодействовать со следом от соседней и вызывать изменения в скорости затухания.

С точки зрения осредненных и пульсационных свойств след за лопастью можно разделить на две области:

а) ближний след, когда $\langle U_{z0}\rangle - \langle U_c\rangle \simeq \langle U_{z0}\rangle$ (где $\langle U_{z0}\rangle$ — скорость в окружающем потоке или скорость на границе следа, а $\langle U_c\rangle$ — скорость на оси следа в плоскости $(z, r\theta)$) и разница между интенсивностью турбулентных пульсаций $\langle U_z'^2\rangle$, $\langle U_\theta'^2\rangle$ и $\langle U_r'^2\rangle$ велика. Относительный порядок их величин в это время неизвестен. Можно предполагать, что во вращающейся системе координат относительный порядок величин $\langle U_z'^2\rangle$, $\langle U_\theta'^2\rangle$ и $\langle U_r'^2\rangle$, вероятно, такой же, как и в случае решетки или изолированного профиля, когда влияние вращения мало;

б) дальний след, когда $(\langle U_{z0}\rangle - \langle U_c\rangle)^2 \ll U_{z0}^2$. Интенсивности турбулентных пульсаций $\langle U_z'^2\rangle$, $\langle U_\theta'^2\rangle$ и $\langle U_r'^2\rangle$ будут значительно отличаться от соответствующих значений для решетки, и влияние вращения велико.

Осредненное значение радиальной скорости не рассматривалось в предыдущей классификации по следующим причинам:

1) величина осредненной радиальной компоненты скорости вблизи задней кромки составляет лишь от 10 до 20% осредненной величины осевой компоненты скорости;

2) радиальная компонента скорости обычно исчезает уже на небольшом расстоянии за задней кромкой.

**3. Модель течения и постановка задачи.** Область следа, примыкающая к задней кромке лопасти винта, вращается примерно со скоростью ротора. Чтобы определить характеристики ближнего следа за лопастью, удобно перейти к системе координат, вращающейся вместе с винтом. Для исследования задачи о следе за винтом используются уравнения неразрывности, осредненного движения и уравнения напряжений Рейнольдса.

Уравнения неразрывности и импульса для мгновенных значений скорости во вращающейся системе координат в тензорных обозначениях за-

[1] Периодической неустойчивостью, вызванной следом от расположенного впереди статора, пренебрегается.

писываются в следующем виде (пренебрегая объемными силами):

(3.1) $U_{i,i}=0$

(3.2) $\dot{U}_i+U_{i,j}U_j+2\varepsilon_{ipq}\Omega_p U_q=-p_{,i}/\rho+\nu U_{i,jj}$

Здесь точка над величинами обозначает частную производную по времени, $\Omega$ — угловая скорость вращения ротора и $\varepsilon_{ipq}$ — компонента тензора. Уравнения для компонент осредненных скоростей $\langle U_i\rangle$ и напряжений Рейнольдса $(-\rho\langle U_i'U_k'\rangle)$ легко получаются из уравнения (3.2). Эти уравнения во вращающейся цилиндрической системе координат приведены в [5].

Модель, описывающая корреляцию между скоростью и градиентом давления и тройные корреляции скоростей в уравнении напряжений Рейнольдса, предложена в [6, 7]. Метод использует свойство инвариантности тензора. В этом методе корреляция между градиентом давления и скоростью описывается двумя членами: один пропорционален градиенту осредненной скорости в соответствии с теорией быстрого затухания, второй соответствует нелинейному стремлению к изотропности в отсутствие вязких напряжений (с небольшими дополнительными поправками из-за влияния вращения на эту тенденцию к выравниванию). Выражение для первого члена проверялось путем воспроизведения результатов классической теории о быстром затухании (диссипацией пренебрегалось). Метод, использованный для получения второго члена, эквивалентен приближению кинетической теории для моментов третьего порядка и приводит к появлению времени релаксации ($T=0.312\,q^2/\langle\varepsilon\rangle$).

При использовании упомянутой выше модели уравнение напряжений Рейнольдса в тензорной форме может быть записано следующим образом (для низшего порядка):

(3.3)
$$\begin{aligned}
&\langle \dot{U}_i'U_k'\rangle+\langle U_{i,j}\rangle\langle U_j'U_k'\rangle+\langle U_{k,j}\rangle\langle U_j'U_i'\rangle+\langle U_i'U_k'\rangle_{,j}\langle U_j\rangle+\\
&+2\Omega_p(\varepsilon_{ipq}\langle U_q'U_k'\rangle+\varepsilon_{kpq}\langle U_q'U_i\rangle)+\{-A_{11}T(q^2/3)[\delta_{ik}\delta_{jl}+\\
&+a(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{il}\delta_{kj})](q^2/3)_{,l}-A_{12}T^2(q^2/3)[\delta_{ik}\delta_{jl}+\\
&+b(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{il}\delta_{kj})\langle\varepsilon\rangle_{,l}]\}_{,j}=2(0.2q^2)F_{srik}(\langle U_r\rangle_{,s}-\varepsilon_{rst}\Omega_t)-\\
&-q^2/T(\langle U_i'U_k'\rangle/q^2-\delta_{ik}/3)-2\langle\varepsilon\rangle\delta_{ik}/3
\end{aligned}$$

где $A_{11}$, $a$, $A_{12}$ и $b$ — неопределенные постоянные, $\langle\varepsilon\rangle=\nu\langle U_{i,j}'U_{i,j}'\rangle$; $q^2=\langle U_z'^2\rangle+\langle U_\theta'^2\rangle+\langle U_r'^2\rangle$, $\delta_{ik}$ — символ Кронекера и в приближении низшего порядка

$$F_{srik}=(\delta_{ri}\delta_{sk}+\delta_{rk}\delta_{si})/2+\ldots$$

В уравнении (3.3) удержан только изотропный вклад от члена «быстрого затухания», т. к. турбулентное состояние не очень отличается от изотропного. Вклад от кориолисовой силы в член быстрого затухания является величиной второго порядка малости.

3.1. Профиль осредненной скорости. В этом разделе развита упрощенная модель следа за винтом для определения осевого и радиального распределений скорости в следе.

Рассмотрим уравнения осредненного движения и сделаем следующие предположения:

а) невязкий поток вне следа вращается как твердое тело;

б) полуширина следа $l$, средний радиус лопасти $R$ и расстояние $L$ от задней кромки в рассматриваемой области таковы, что $l\ll L\ll R$;

в) на задней кромке лопасти не происходит отрыва потока, так что расстояние от задней кромки до места, где скорость на оси следа составляет ~70% значения скорости в окружающем потоке, мало (в калибрах длины хорды) [7]. Это ограничивает рассматриваемую область;

г) скорость вращения $\Omega$ и осевая скорость $\langle U_{z0}\rangle$ вне следа таковы, что $\Omega \leqslant (\langle U_{z0}\rangle / L)$;

д) отношение радиуса основания лопасти к ее высоте велико, так что изменением характеристик течения в радиальном направлении можно пренебречь;

е) число Рейнольдса, вычисленное по значению осевой скорости в окружающем (невязком) потоке и толщине пограничного слоя на задней кромке лопасти, велико;

ж) лопасти винта имеют радиальное направление;

з) градиент давления в осевом направлении пренебрежимо мал в рассматриваемой области.

Эти предположения позволяют привести уравнение импульса в цилиндрической системе координат к виду обычному для декартовой системы с сохранением кориолисовой силы. В действительности кориолисов член должен быть сохранен в более общем виде, если ось вращения и ось следа не совпадают по направлению (не коллинеарны); однако легко показать, что при такой геометрии не существует подобного решения. Поэтому ограничимся только следами, ось которых совпадает с осью вращения, т. е. следами за ненагруженными лопастями.

Сделанные выше предположения позволяют также пренебречь всеми вязкими членами; пренебречь всеми производными вдоль направления потока, за исключением тех, которые умножаются на $\langle U_z\rangle$; заменить $\langle U_z\rangle$ на $\langle U_{z0}\rangle$ (где оно не дифференцируется) и из решения уравнения импульса в поперечном направлении заключить, что статическое давление постоянно поперек следа. Уравнения тогда сводятся к следующей форме:

$$\langle U_{z0}\rangle \frac{\partial\langle U_z\rangle}{\partial z} = \nu_T \frac{\partial^2\langle U_z\rangle}{\tau^2\,\partial\theta^2} \tag{3.4}$$

$$\langle U_{z0}\rangle \frac{\partial\langle U_r\rangle}{\partial z} - 2\Omega\langle U_\theta\rangle = \nu_T \frac{\partial^2\langle U_r\rangle}{r^2\,\partial\theta^2} \tag{3.5}$$

где использованы выражения для турбулентной вязкости

$$\langle U_z' U_\theta'\rangle = -\nu_T \frac{\partial\langle U_z\rangle}{r\,\partial\theta}, \qquad \langle U_r' U_\theta'\rangle = -\nu_T \frac{\partial\langle U_r\rangle}{r\,\partial\theta} \tag{3.6}$$

Подобное решение действительно существует в виде

$$\langle U_z\rangle = \langle U_{z0}\rangle - \langle U_s\rangle f(y/l), \quad \langle U_r\rangle = \Phi g(y/l) \tag{3.7}$$

где $y=r\theta$, а $\theta$ отсчитывается относительно оси следа. Полагая $\eta = y/l$ и используя условие сохранения количества движения в осевом направлении (с учетом того, что $\langle U_\theta\rangle$ должно быть антисимметрично), получим классическое решение для осевой скорости

$$\langle U_{z0}\rangle l^2 = 2z\nu_T, \quad f(\eta) = e^{-\eta^2/2} \tag{3.8}$$

где $\langle U_s\rangle$ — дефект скорости на оси и $\langle U_s\rangle \sim z^{-1/2}$, $l \sim z^{1/2}$. По-видимому, константы не должны значительно отличаться от тех, которые соответствуют решению для следа без вращения. Тогда можно считать, что $\langle U_s\rangle l/\nu_T = 12.5$ [8]. Используя это выражение для $\langle U_s\rangle$, для $\langle U_\theta\rangle$ можно получить из уравнения неразрывности

$$\langle U_\theta\rangle=\frac{\langle U_s\rangle l}{2z}\eta f \tag{3.9}$$

Обычная нормировка

$$\Phi=\frac{\Omega\langle U_s\rangle l}{\langle U_{z0}\rangle} \tag{3.10}$$

приводит к уравнению

$$g''+\eta g'=-2\eta f \tag{3.11}$$

Используя условие, что $g$ должно исчезать на большом расстоянии от следа (т. е. во внешнем потоке отсутствует эффект вращения), получим

$$g=-f'=\eta f \tag{3.12}$$

Отметим, что $\Phi$ не зависит от $z$. Видно, что эффекты действуют в нужном направлении, если использовать правую систему координат.

Общее решение уравнения (3.11) должно быть добавлено к (3.12); оно представляет собой константу плюс функцию ошибок, что соответствует вторичному течению около задней кромки. Это решение не обращается в нуль в окружающем потоке. В системе сделанных предположений лопасти ненагруженные, на задней кромке, следовательно, не существует радиального течения и потому общее решение равно нулю.

3.2. Турбулентная структура. Определение турбулентных величин в следе за вращающимися гидромашинами представляет собой очень трудную задачу. Если нужна информация о затухании и распределении турбулентных характеристик в следе за лопастью, необходимо решать совместно полную систему моделирующих уравнений, описанных в п. 3, вместе с уравнением диссипации энергии (которое не приведено в данной работе). Однако оценку относительной величины турбулентных характеристик можно получить, сделав ряд упрощений в уравнении напряжений Рейнольдса [6].

Существенное упрощение, которое мы хотим сделать в дополнение к предположениям п. 3.1, это считать поток квазиоднородным.

В действительности не существует области в следе, где это выполняется в точности. В то время как величина $\langle U_z\rangle'=\partial\langle U_z\rangle/\partial y$ примерно постоянна вблизи от следа, для $\langle U_r\rangle'=\partial\langle U_z\rangle/\partial y$ этого нет; область, в которой этот градиент примерно постоянен (вне оси), является областью, где $\langle U_z\rangle'$ исчезает, и наоборот. Делая предположение об однородности (т. е. пренебрегая переносом поперек следа), мы по существу проводим осреднение по центральной части следа. Легко показать, что не существует устойчивого решения для уравнений однородного течения (даже без уравнения диссипации); это является следствием того, что пренебрегается энергией, возвращаемой либо путем затухания, либо с помощью переноса. (Хотя кажется, что решение существует в том смысле, что можно получить реальные значения компонент энергии, более тщательное исследование показывает, что они соответствуют мнимым градиентам скоростей ($\langle U_z\rangle'^2T^2<0$).) Простейший способ обойти эту проблему — позволить потоку затухать, оставаясь подобным, т. е. написать

$$\frac{d}{dt}\langle U_i'U_j'\rangle=\langle U_i'U_j'\rangle\frac{1}{q^2}\frac{d}{dt}q^2,\qquad \sigma=\frac{1}{q^2}\frac{d}{dt}q^2 \tag{3.13}$$

Этот дополнительный член можно также выразить как возвращение энергии с помощью переноса. Это приводит в точности к таким же рейнольдсовым уравнениям для напряжений, как в равновесном случае (после исключения диссипации), но с новым масштабом времени

$$1/T'=\sigma+1/T \tag{3.14}$$

Величина $\sigma$ выбирается такой, чтобы при отсутствии вращения (и следовательно $\langle U_z\rangle'$) получить правильные значения для компонент энергий. Типичные значения для компонент энергии выбраны такими же, как и в инерционном подслое, т. е. $\langle U_z\rangle'^2=0.57q^2$; $\langle U_r\rangle'^2=\langle U_\theta\rangle'^2=0.215q^2$. Кроме того, в рамках этой работы уравнение энергии и напряжения Рейнольдса для рассматриваемого случая, можно записать в следующем виде:

$$\sigma q^2-2P=-2\langle\varepsilon\rangle \tag{3.15}$$

$$\langle U_\theta'U_z'\rangle=A(\langle U_\theta'^2\rangle-0.2q^2) \tag{3.16}$$

где $P$ представляет собой суммарное увеличение энергии и равняется $-\langle U_\theta'U_z'\rangle\langle U_z\rangle'$, а $A=-\langle U_z\rangle'T'$.

Из решения для отдельных компонентов энергии, используя (3.15) и (3.16) вместе с выражением для времени релаксации $T=0.312q^2/\langle\varepsilon\rangle$, нетрудно показать, что

$$T\sigma=-0.417 \tag{3.17}$$

$$T'P/q^2=0.1775 \tag{3.18}$$

В дальнейшем выражение для суммарного увеличения энергии $P$ используется в более общем виде, а именно

$$P=-\langle U_\theta'U_r'\rangle\langle U_r\rangle'-\langle U_\theta'U_z'\rangle\langle U_z\rangle'$$

Отметим также (из предыдущего раздела), что $\langle U_z\rangle'=\Omega\langle U_z\rangle/\langle U_{z0}\rangle$ и что, следовательно (в области вниз по потоку), $\langle U_z\rangle'\ll\Omega$. Поэтому можно пренебречь $\langle U_r\rangle'$ по сравнению с $\Omega$ там, где они встречаются вместе. Увеличение энергии за счет $\langle U_z\rangle'$ постоянно возрастает по сравнению с увеличением за счет $\langle U_z\rangle'$, но в области, где справедливы принятые приближения, $\langle U_r\rangle'$ пренебрежимо мало по сравнению с $\langle U_z\rangle'$.

Уравнения, которые необходимо решать, следующие:

$$\begin{gathered}
(\langle U_\theta'^2\rangle-q^2/5)\langle U_r\rangle^2+2\Omega(\langle U_r'^2\rangle\langle U_\theta'^2\rangle)=-\frac{\langle U_r'U_\theta'\rangle}{T'}\\
(\langle U_\theta'^2\rangle-q^2/5)\langle U_z\rangle'+2\Omega\langle U_z'U_z'\rangle=-\frac{\langle U_\theta'U_z'\rangle}{T'}\\
\langle U_\theta'U_z'\rangle(\langle U_r\rangle'-2\Omega)=-\frac{\langle U_z'U_z'\rangle}{T'}\\
\langle U_\theta'U_z'\rangle(\langle U_z\rangle'-2\Omega)=-\frac{1}{2T'}(\langle U_r'^2\rangle-q^2/3)-P/3\\
2\Omega\langle U_\theta'U_r'\rangle=-\frac{1}{2T'}(\langle U_\theta'^2\rangle-q^2/3)-P/3\\
\langle U_\theta'U_z'\rangle\langle U_z\rangle'=-\frac{1}{2T'}(\langle U_z'^2\rangle-q^2/3)-P/3
\end{gathered} \tag{3.19}$$

Используя соотношения

$$\langle U_\theta' U_z'\rangle = A(\langle U_\theta'^2\rangle - 0.2q^2)$$
$$\langle U_r' U_z'\rangle = B(\langle U_\theta'^2\rangle - 0.2q^2)$$
$$\langle U_r' U_\theta'\rangle = C(\langle U_\theta'^2\rangle - 0.2q^2)$$

можно непосредственно получить решение в виде

$$\langle U_\theta'^2\rangle = \frac{q^2}{3}\frac{(1+{}^3/_5\Gamma)}{(1+\Gamma)}$$

(3.20) $$\langle U_z'^2\rangle = \frac{q^2}{3}\left\{1 - \frac{4\langle U_z\rangle' T'C - 2\langle U_z\rangle' T'A - 4\Omega T'C}{3}\frac{{}^2/_5}{1+\Gamma}\right\}$$

$$\langle U_z'^2\rangle = \frac{q^2}{3}\left\{1 - \frac{4\langle U_z\rangle' T'A - 2\langle U_z\rangle' T'C}{3}\frac{{}^2/^5}{1+\Gamma}\right\}$$

Здесь

$$\Gamma = 4\Omega T'C - \frac{2T'\langle U_r\rangle' C + 2T'\langle U_z\rangle' A}{}$$

$$A = \frac{-\langle U_z\rangle' T'}{1 - 4\Omega T'^2(\langle U_r\rangle' - 2\Omega)}$$

$$B = \frac{T'(\langle U_z\rangle' - 2\Omega)\langle U_z\rangle' T'}{1 - 2\Omega T'^2(\langle U_r\rangle' - 2\Omega)}$$

(3.21) $$C = \frac{-T'\langle U_z\rangle'}{1 - 4\Omega T'^2(\langle U_r\rangle' - 4\Omega)}$$

Условие на $T'$ (3.18) дает

(3.22) $$\Gamma = 7.889 + (4\Omega T'C)8.889$$

Отметим, что при $\langle U_r\rangle' = 0$, если даже $\Omega \neq 0$, имеем $C = 0$ и, следовательно, $\Gamma$ не изменяется, а потому не изменяются $\langle U_\theta'^2\rangle$ и $\langle U_r'^2\rangle$, $\langle U_z'^2\rangle$.

Следовательно, необходимо ненулевое значение $\langle U_r\rangle'$, чтобы проявился эффект вращения. Если $\Omega = 0$, но $\langle U_r\rangle' \neq 0$, нетрудно систему уравнений (20) свести к следующей:

$$\frac{\langle U_\theta'^2\rangle}{q^2/3} = \left(\frac{\langle U_\theta'^2\rangle}{q^3/3}\right)_{\langle U_r\rangle'=0}$$

(3.23) $$\frac{\langle U_r'^2\rangle}{q^2/3} = \left(\frac{\langle U_r'^2\rangle}{q^2/3}\right)_{\langle U_r\rangle'=0} + 0.09(\langle U_r\rangle' T')^2$$

$$\frac{\langle U_z'^2\rangle}{q^2/3} = \left(\frac{\langle U_z'^2\rangle}{q^2/3}\right)_{\langle v_r\rangle'=0} - 0.09(\langle U_z\rangle' T')^2$$

так что радиальный компонент возрастает за счет осевого компонента. В действительности ограничение на $\Gamma$ приводит к ограничению на (безразмерное) суммарное увеличение энергии $P$

(3.24) $$-P = (\langle U_r\rangle' T')^2 + (\langle U_z'\rangle T')^2 = 11.833$$

Если все увеличение происходит за счет $\langle U_r\rangle'$ (т. е. $\langle U_z\rangle' = 0$), члены в (3.23) просто поменяются ролями $\langle U_r'^2\rangle$ и $\langle U_z'^2\rangle$ (таким образом, можно ожидать, что если существует только один градиент, энергия в этом компонентном направлении будет наибольшей).

Общий случай ненамного труднее, и необходимо использовать принятые приближения, заменяя $\langle U_r\rangle'$ на $\Omega\langle U_s\rangle/\langle U_{z0}\rangle$ и т. д. Удерживая только члены первого порядка по $\langle U_s\rangle/\langle U_{z0}\rangle$ (которые исчезают, когда след долго расширяется), окончательно получим

$$\frac{\langle U_\theta'^2\rangle}{q^2/3}=\left(\frac{\langle U_\theta'^2\rangle}{q^2/3}\right)_{\langle U_r\rangle'=0}(1+0.7\chi)$$

$$\frac{\langle U_r'^2\rangle}{q^2/3}=\left(\frac{\langle U_r'^2\rangle}{q^2/3}\right)_{\langle U_r\rangle'=0}(1-0.023\chi) \tag{3.25}$$

$$\frac{\langle U_z'^2\rangle}{q^2/3}=\left(\frac{\langle U_z'^2\rangle}{q^2/3}\right)_{U\langle r\rangle'=0}$$

Здесь

$$\chi=\frac{4\Omega^2T'^2\langle U_s\rangle/\langle U_{z0}\rangle}{1+16\Omega^2T'^2} \tag{3.26}$$

Можно вычислить и приближенное значение для $\Omega T'$

$$\Omega T'=0.352L\Omega/\langle U_{z0}\rangle \tag{3.27}$$

В соответствии с принятыми приближениями $L\Omega/\langle U_{z0}\rangle$ не может быть больше единицы, так что $\Omega T'$ в общем случае будет меньше единицы. Следовательно, поправки, даваемые выражением (3.26), действительно малы. Однако представляет интерес направленность развития, которое приводит к уменьшению радиальной компоненты и к увеличению тангенциальной составляющей.

**4. Обсуждение результатов и выводы.** Теоретическое исследование следа за винтом в осевом потоке, проведенное в п. 3.1 и 3.2 данной работы, справедливо для лопасти, в которой относительная скорость на задней кромке направлена вдоль оси двигателя. Несмотря на это серьезное ограничение, тем не менее были получены некоторые результаты о влиянии вращения на характеристики затухания турбулентного следа от винта.

Необходимо отметить, что профиль осредненной скорости, полученный в настоящем исследовании, необязательно пригоден, например, для компрессоров или турбин. Для этих машин предположения, сделанные в данной работе, могут оказаться недействительными. Поэтому следует иметь в виду, что каждая задача должна рассматриваться отдельно, а не в общем случае.

Результаты п. 3.1 можно легко прокомментировать. Известно, что кориолисова сила действует в плоскости, перпендикулярной оси машины, поэтому неудивительно получить, что осевая составляющая следа не меняется. Действительно, кориолисова сила стремится сохранить величину углового импульса, так что частица должна двигаться вовне или внутрь по радиусу в зависимости оттого, уменьшается или увеличивается ее (истинная) угловая скорость. Так как расширение следа связано с величинами осредненных скоростей в направлении $\theta$, появляется радиальный компонент. Отметим, что кориолисова сила не может производить работы, поэтому (в принципе) здесь не может происходить изменения энергии. Однако кориолисова сила может изменять профиль радиальной скорости и, следовательно, величину турбулентной энергии.

Из уравнения для турбулентной энергии очевидно, что вращение не влияет непосредственно на уравнение энергии. Это означает, что в общем случае должно существовать перераспределение энергии между тремя флуктуирующими компонентами скорости. Однако из уравнения (25) можно видеть, что имеет место чистое увеличение турбулентной энергии благодаря вращению за счет изменения распределения радиальной скорости. Из уравнения (25) при сильном вращении заключаем, что $\langle U_\theta'^2\rangle > \langle U_z'^2\rangle > \langle U_r'^2\rangle$ в то время как при $\Omega=0$ обычно наблюдается противоположная тенденция, т. е. $\langle U_z'^2\rangle > \langle U_r'^2\rangle > \langle U_\theta'^2\rangle$. Подобная информация имеет важное значение для изучения механизмов генерации шумов и возбужденных из-за турбулентности колебаний потока во вращающихся гидромашинах.

Поступила 14 VI 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Pearson H., McKenzie A. B.* Wakes in axial compressors. J. Roy. Aero. Soc., 1959, vol. 63, No. 583.
2. *Landgrebe A. J.* An analytical method for predicting rotor wake geometry. J. Amer. Helicopter Soc., 1969, vol. 14, No. 4.
3. *Hwang N. H. C., Baldwin L. V.* Decay of turbulence in axisymmetric wakes. Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Engng, 1966, vol. 88, No. 1.
4. *Steiger M. H., Bloom M. H.* Three-dimensional viscous wakes. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt 2.
5. *Raj R., Lakshminarayana B.* Equations of mean motion, Reynolds stress and turbulence energy in a cylindrical rotating coordinate system. ARL. The Penn. State Univ., Internal Memo, May 13, 1973.
6. *Lumley J. L.* A model for computation of stratified turbulent flows. (Internat. Sympos. Stratified Flows. Paper 14.) Novosibirsk, 1972.
7. *Lumley J. L., Khajeh-Nouri B.* Modeling homogeneous deformation of turbulence. Presented at Symposium on Turbulence in the Planetary Boundary Layer of the Atmosphere. Moscow, 1973.
8. *Tennekes H., Lumley J. L.* A first course in turbulence. Cambridge, M.I.T. Press., 1972, Chapter IV.