

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ

В. А. БРИСКМАН, А. А. ИВАНОВА, Г. Ф. ШАЙДУРОВ

(Пермь)

Периодическое изменение параметров равновесия или течения несжимаемой жидкости, как известно, оказывает эффективное влияние на гидродинамическую устойчивость. Примером может служить параметрическое возбуждение поверхностных волн (гравитационно-капиллярных [1], электрогидродинамических [2], магнито-гидродинамических [3]) и колебаний жидкости в сообщающихся сосудах [4, 5]. Основным предметом экспериментальных исследований в этих задачах было определение границ областей неустойчивости равновесия по отношению к малым возмущениям.

В настоящей работе экспериментально исследованы параметрический резонанс и конечно-амплитудные параметрические колебания, возникающие в заполненной жидкостью U-образной трубке при переменных вертикальных перегрузках.

Описаны два типа колебаний жидкости и определены для них области неустойчивости равновесия по отношению к случайным малым возмущениям (самовозбуждение) и конечно-амплитудным возмущениям. Исследованы нелинейные режимы возбуждения и взаимные переходы между колебаниями обоих типов. Найдены области существования установившихся колебаний.

1. Постановка задачи. Уравнения возмущений. Рассмотрим малые колебания (возмущения равновесия) жидкости в сообщающихся сосудах, имеющих вид U-образной трубки с внутренним диаметром d . Полная длина столба жидкости, заполняющей трубку, равна $2L$, причем $L \gg R \gg d$, где R — радиус кривизны изогнутой части трубки.

Исключив из рассмотрения параметрическое возбуждение поверхностных волн [1-3], исследуем специфичные для сообщающихся сосудов колебания, сопровождающиеся перетеканием жидкости из одного колена трубки в другое. Сформулируем два типа условий на границе газ — жидкость — твердая стенка трубки, обнаруженные в эксперименте [5]:

1) края мениска свободно смещаются относительно стенки. Поэтому при колебаниях сохраняется равновесная форма мениска и капиллярные силы не играют роли (колебания типа a или поршневые);

2) края мениска прилипают к трубке, и при малых колебаниях поверхность изгибается как мембрана с закрепленными краями (колебания типа b или менисковые). При таких граничных условиях для возбуждения поршневых колебаний необходим отрыв мениска от стенки, т. е. существует начальное напряжение сдвига.

Первый случай реализовался в экспериментах с жидкостями, смачивающими трубку, когда смачивание было близко к полному. Прилипание мениска наблюдалось при ухудшении смачивания и поэтому имело место практически всегда, когда не принимались специальные меры по очистке и поддержанию чистоты соприкасающихся поверхностей. Начальные напряжения сдвига возникают, по-видимому, из-за адгезии между жидкостью и твердым телом, т. е. по той же причине, что и гистерезис смачивания [6].

В предположении об одномерности течения и при обычных граничных условиях на свободной поверхности легко найти [5] колебательные реше-

ния (собственные колебания), удовлетворяющие вертикальной проекции уравнения Эйлера. Для частот Ω собственных колебаний типа a и b получаются выражения

$$(1.1) \quad \Omega_a^2 = \frac{g_0}{L}, \quad \Omega_b^2 = \frac{g_0}{L} + \frac{4\alpha}{\rho L d^2} j_{mn}^2$$

Здесь g_0 — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, j_{mn} — корни функций Бесселя первого рода n -го порядка; $m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots$

Приведем также оценку для декремента затухания δ колебаний жидкости с частотой γ . При достаточно высоких частотах, соответствующих описанному ниже эксперименту, когда

$$(1.2) \quad \epsilon \equiv (2\nu/\gamma d^2)^{1/2} \ll 1$$

на стенках трубки возникает скин-слой толщины ϵd [7], в котором затухает сдвиговая волна в жидкости с вязкостью ν . Предполагая, что диссипация энергии происходит в основном в скин-слое, и выражая декремент через диссипацию [7], легко получить

$$(1.3) \quad \delta_a = \delta_b = \epsilon \gamma$$

что совпадает с результатом расчета δ_a для поршневых колебаний [4] и измерениями затухания собственных колебаний [8, 9].

Если трубка совершает вертикальные колебания (вибрации) с амплитудой a и частотой ω , то в неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудами, эффективное ускорение свободного падения модулируется во времени

$$(1.4) \quad g = g_0 - a\omega^2 \cos \omega t$$

Модуляция не нарушает условий равновесия, вызывая только однородные пульсации давления в жидкости. Эффективные собственные частоты, однако, оказываются переменными параметрами, так что можно ожидать возбуждения параметрического резонанса: поведение во времени малых смещений поверхности ξ описывается в этом случае уравнением типа Матье с диссипативным членом [4]

$$(1.5) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + (\Omega^2 + q \cos \omega t) \xi = 0$$

Здесь Ω и δ определены выражениями (1.1) и (1.3), частота модуляции равна частоте вибрации ω , а амплитуда модуляции q равна $a\omega^2/L$.

Граница главной области параметрического резонанса, в которой частота колебаний жидкости γ совпадает с половиной частоты модуляции ω и близка к собственной частоте Ω ($\gamma = \omega/2 \approx \Omega$), может быть построена разложением решения уравнения (1.5) по степеням малой амплитуды модуляции [4]. В линейном по q приближении имеем

$$(1.6) \quad \left[\left(\frac{a}{L} \right)^2 - \epsilon^2 \right]^{1/2} = \pm 2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} \right)$$

Отсюда видно, что пороговое значение безразмерной амплитуды вибрации $(a/L)_{\text{кр}} = \epsilon$, где ϵ определено (1.2).

2. Экспериментальная установка и методика проведения эксперимента. Для экспериментального исследования параметрических установившихся колебаний жидкости и их возбуждения была изготовлена установка [8], включающая в себя за-

полненную жидкостью U-образную трубку, устройство для сообщения трубке вертикальных колебаний (вибростенд), устройство для регистрации колебаний жидкости в трубке.

Платформа вибростенда с закрепленными на ней трубками приводилась в близкие к гармоническим вертикальные колебания посредством электродвигателя, редуктора и эксцентрика. Амплитуду вибраций можно было изменять в пределах $(3.0 \div 3.0) \pm 0.5$ мм, частоту — $(0.3 \div 5) \pm 0.02$ гц.

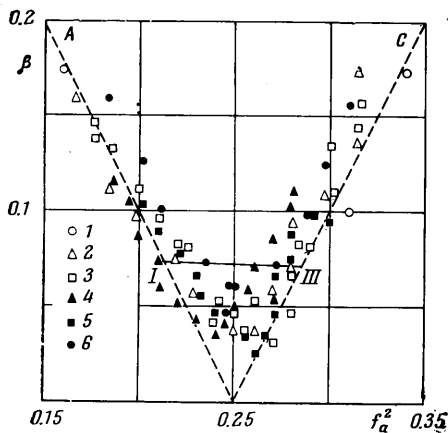
Для измерения амплитуды и частоты колебаний жидкости относительно стенок трубки была применена система [9], состоящая из емкостного измерителя перемещений, усилителя и электронного осциллографа. Абсолютная погрешность измерения амплитуды колебаний поверхности жидкости не превышала ± 0.05 мм.

В эксперименте варьировались следующие параметры: граничные условия, внутренний диаметр трубок ($d=1.85, 1.25, 0.76$ см), свойства жидкостей (применялись вода и этиловый спирт 96%-ной концентрации), собственная частота колебаний (путем изменения длины столба жидкости $2L=(137 \div 689) \pm 1$ мм), амплитуда и частота вибраций.

В соответствии с конструкцией экспериментальной установки все измерения проводились путем квазистационарного изменения частоты вибрации при фиксированной амплитуде. Колебания жидкости в трубке наблюдались в двух областях ($a\omega$), для одной из которых $\omega/2 \approx \Omega$ (первая, главная резонансная область), для другой $\omega \approx \Omega$ (вторая резонансная область). Это обстоятельство, а также наличие порога свидетельствовали о параметрическом характере возбуждения колебаний.

При исследовании устойчивости по отношению к конечно-амплитудным возмущениям последние задавались без начальной скорости путем предварительного отклонения уровня жидкости от положения равновесия.

3. Параметрические колебания в отсутствие начальных напряжений сдвига. В случае полного смачивания наблюдалось самовозбуждение поршневых колебаний. На фиг. 1 в безразмерных координатах $\beta = [(a/L)^2 - \varepsilon^2]^{1/2}$ и $f_a^2 = \Omega_a^2 / \omega^2$ пунктиром показана нейтральная кривая (1.6) и приведены экспериментальные данные, соответствующие границам



Фиг. 1

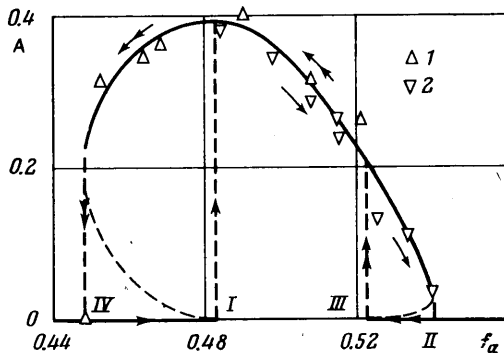
фиг. 1 при фиксированном значении $a/L=0.081$ (эксперимент со спиртом, $2L=37.2$ см, $d=1.85$ см). Обозначения 1 и 2 относятся к результатам измерений при повышении и понижении частоты соответственно. На фиг. 3 изображена область ABC неустойчивости равновесия к случайным малым возмущениям, а также область DEFGH существования конечно-амплитудных колебаний жидкости (эксперимент с водой, $2L=53.5$ см, $d=1.85$ см). Стрелки около экспериментальных точек показывают направление изменения частоты, обозначения относятся: 1 — к самовозбуждению, 2 — срыву колебаний, 3 — неустойчивости равновесия по отношению к конечно-амплитудному возмущению.

Если амплитуда и частота модуляции вначале задавались такими, что жидкость в трубке покоилась, а затем частота понижалась (это соответст-

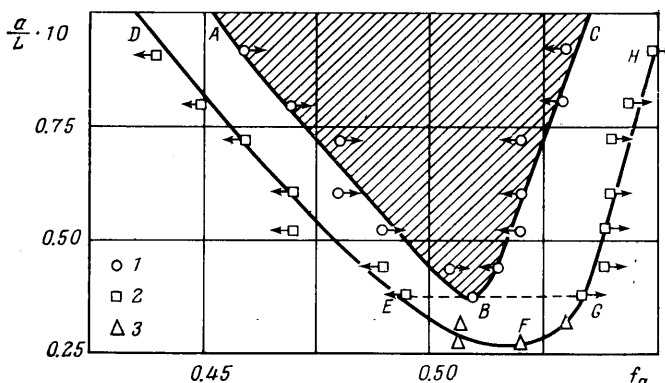
вует перемещению слева направо изображающей точки на графиках), то самовозбуждение колебаний происходило в точке I фиг. 2 (на кривой *AB* фиг. 3). При увеличении частоты самовозбуждение происходило в точке III фиг. 2 (на кривой *BC* фиг. 3). Колебания возникали скачком: амплитуда установившегося движения изменялась от нуля сразу до значения, значительно (на два порядка) превышающего предел чувствительности измерительного устройства. Наблюдался гистерезис — затягивание установившихся колебаний за пределы области самовозбуждения.

Срыв (исчезновение) колебаний происходил в точках II или IV фиг. 2 (на линиях *GH* или *DE* фиг. 3) соответственно при понижении или повышении частоты. Жирными пунктирными линиями на фиг. 2 изображены амплитуды при установлении (I и III) и срыве (II и IV) движения.

В областях *ABED* и *CBGH* самовозбуждение не происходит, однако кроме существования колебаний, «затянутых» из области *ABC*, возможна также неустойчивость равновесия по отношению к заданным конечно-амплитудным возмущениям. В последнем случае начальные смещения столба жидкости должны превышать значения, показанные качественно на фиг. 2 тонкими пунктирными линиями, соответствующими неустойчивым участкам амплитудных кривых параметрических колебаний. Ниже



Фиг. 2



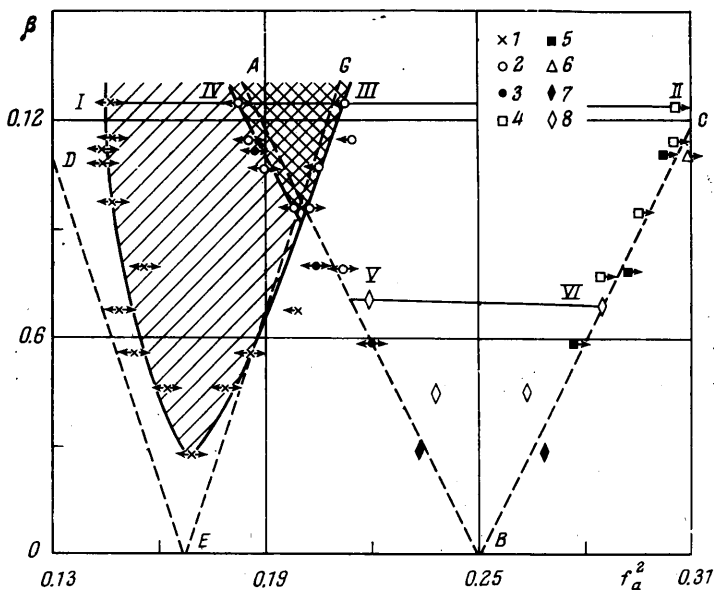
Фиг. 3

порога (линия *EBG*) заданные возмущения являются единственным способом возбуждения неустойчивости. Подкритическая область ограничена экспериментальной кривой *EFG*, ниже которой стационарные колебания не возникали ни при каких амплитудах возмущений.

4. Параметрические колебания при наличии начальных напряжений сдвига. Эксперименты показывают, что прилипание мениска к стенкам трубки «запирает» поршневые движения: их возникновение при малых возмущениях становится невозможным. В этих условиях самовозбуждаются только менисковые колебания, которые в свою очередь могут проводи-

ровать возникновение поршневых. Поэтому при наличии начальных напряжений сдвига границы газ — жидкость относительно стенки возможны два способа возбуждения поршневых колебаний: либо из равновесия под воздействием заданных конечно-амплитудных возмущений, либо из менисковых колебаний.

На фиг. 4 пунктиром показаны границы областей неустойчивости для возмущений типа a (кривая ABC) и b (кривая DEG), построенные по (1.6), и приведены результаты эксперимента с водой. Поскольку сдвиг областей по частоте определяется разностью Ω_a и Ω_b , границы областей воз-



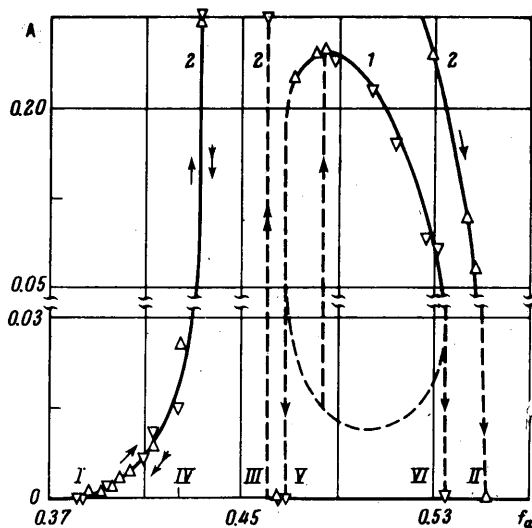
Фиг. 4

буждения менисковых колебаний в координатах β , f_a^2 (фиг. 4) были бы различны при разных Ω_b . Поэтому для возбуждения менисковых движений приводятся данные, относящиеся к одному конкретному случаю. На фиг. 4 приняты следующие обозначения: 1 — возбуждение менисковых колебаний; 2, 3 — возбуждение поршневых колебаний в отсутствие конечно-амплитудных возмущений; 4, 5, 6 — срыв колебаний; 7, 8 — неустойчивость равновесия к конечно-амплитудным возмущениям; 1, 2, 4 — $2L=46.7$ см, $d=1.85$ см; 3, 5, 7 — $2L=51.8$ см, $d=1.85$ см; 6, 8 — $2L=50$ см, $d=1.25$ см.

Рассмотрим сначала возбуждение поршневых колебаний при наличии конечно-амплитудных возмущений. Такое возбуждение в отличие от случая, описанного в п. 3, оказалось возможным только в области между границами AB и BC . На этих же границах происходит срыв установившихся колебаний.

На фиг. 5 кривая 1 изображает жесткое возбуждение описываемых колебаний в сечении V—VI области резонанса на фиг. 4 (вода, $2L=50$ см, $d=1.25$ см, $a/L=0.084$; обозначения на фиг. 5 и фиг. 2 аналогичны). Заметим, что в отсутствие начальных напряжений сдвига аналогичную форму (замкнутые кривые) имеют амплитудные зависимости параметрических колебаний от частоты в подкритической области (например, в области $EBGF$ на фиг. 3).

Приведенные результаты можно интерпретировать, используя аналогию между возбуждением поршневых колебаний при наличии начальных напряжений сдвига и возникновением параметрической неустойчивости маятника, на который действуют периодически меняющаяся упругая сила, а также силы вязкого и сухого трения [10]. В последнем случае равновесие оказывается неустойчивым в тех же границах, в которых возникает самовозбуждение при наличии только вязкого трения. Однако сухое трение приводит к появлению двух областей начальных значений (области притягивания), в одной из которых колебания затухают, в другой — нарастают. В соответствии с этим в экспериментах возникновение поршневых колебаний оказалось возможным в границах (фиг. 4), построенных без учета начальных



Фиг. 5

напряжений сдвига, однако малые случайные возмущения, по-видимому, попадали в область притягивания к тривиальному (нулевому) решению и не вызывали неустойчивость.

Как показано в [10], амплитуда колебаний на неустойчивом участке кривой 1 фиг. 5 (тонкий пунктир) должна асимптотически стремиться к бесконечности на границах параметрического резонанса. Поэтому тот факт, что полученный в эксперименте участок стационарных колебаний (сплошная линия) замыкает амплитудную кривую сверху, не выходя за пределы области неустойчивости (нет гистерезиса), представляется топологически наиболее естественным.

В отсутствие заданных возмущений как при понижении, так и при повышении частоты неустойчивость равновесия (область неустойчивости на фиг. 4 заштрихована) возникает вблизи линии *DEG*. Развитие неустойчивости всегда начинается с появления менисковых колебаний, однако стационарные движения оказываются различными на разных участках границы. На высокочастотной границе (на фиг. 4 слева) устанавливаются менисковые стационарные колебания. То же самое происходит и на низкочастотной границе при амплитудах модуляции, лежащих ниже точки *F*. На участке *FG* устанавливаются стационарные поршневые колебания. Здесь происходит вначале самовозбуждение менисковых колебаний, которые нарастают и при достаточно большой амплитуде играют, по-видимому, роль конечных возмущений для возникновения поршневых движений. Такова же, вероятно, роль стационарных менисковых колебаний на границе *AF*: здесь они переходят в поршневые при понижении частоты. Таким образом, заштрихованная в клетку на фиг. 4 зона, где совпадают области параметрического резонанса для поршневых и менисковых движений, ока-

зывается областью возбуждения поршневых колебаний в отсутствие заданных возмущений.

Возникновение менисковых колебаний и их переход в поршневые представлены кривой 2 на фиг. 5 (вода, $2L=46.7$ см, $d=1.85$ см) при значении амплитуды модуляции $a/L=0.128$, отмеченном линией I—IV—III—II на фиг. 4. Амплитудная кривая оказалась срезанной сверху, поскольку при $A>0.275$ смещения поверхности жидкости выходили за пределы емкостного датчика. Как видно из графика, характер возбуждения менисковых колебаний в точке I мягкий. Гистерезиса не наблюдается, по мере проникновения в область неустойчивости амплитуда нарастает медленно. С последним обстоятельством может быть связано некоторое расхождение экспериментальной и расчетной кривых на фиг. 4, поскольку в опыте регистрировались амплитуды $A'\geq 0.1$ мм. Амплитуда установившихся движений около точки IV (граница AF фиг. 4) быстро нарастает, и менисковые колебания переходят в поршневые. Обратный переход осуществляется на тех же частотах. Режим возбуждения поршневых колебаний в точке III (граница FG) жесткий, они возникают скачком. При понижении частоты модуляции установившиеся поршневые движения продолжают существовать до точки II (граница BC), на которой происходит срыв колебаний.

Как видно из фиг. 4, во всех случаях экспериментальные точки, соответствующие переходу от менисковых движений к поршневым и обратно, ложатся вблизи границы AB, а точки, соответствующие срыву колебаний, — вблизи BC. Следовательно, независимо от способа возбуждения стационарные поршневые колебания при наличии начальных напряжений сдвига устойчивы только в той области параметров, в которой происходит самовозбуждение в отсутствие начальных напряжений.

Авторы благодарят Г. И. Петрова и участников его семинара за обсуждение и С. С. Григоряна за полезные советы.

Поступила 26 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Стретт Дж. В. (Рэлей). Теория звука, т. 1, 2. М., Гостехиздат, 1955.
2. Брискман В. А., Шайдуров Г. Ф. Параметрическая неустойчивость поверхности жидкости в переменном электрическом поле. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 6.
3. Брискман В. А., Шайдуров Г. Ф. Параметрическое возбуждение неустойчивости жидкости в магнитном и электрическом полях. Магнитная гидродинамика, 1969, № 3.
4. Григорян С. С., Жигачев Л. И., Козарко Б. С., Якимов Ю. Л. Параметрический резонанс в сообщающихся сосудах при вертикальных переменных перегрузках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
5. Брискман В. А., Иванова А. А., Черепанов А. А., Шайдуров Г. Ф. Параметрическая неустойчивость равновесия жидкости в сообщающихся сосудах. В сб. «Гидродинамика», вып. 8. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1976, № 362.
6. Адам Н. К. Физика и химия поверхностей. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
8. Claron C. Mouvement oscillatoire avec viscosite et l'inertie. Publs. S. and Tech. du Ministere de l'Air, 1955, No. 303.
9. Кравченко А. Е., Смирнов А. Г. Экспериментальные исследования свободных затухающих колебаний жидкости в U-образных круглых трубах. В сб. «Физическая гидродинамика и кинетика жидкости». Ростов-на-Дону, 1968.
10. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М., «Мир», 1973.