

## КОНВЕКЦИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С ВОЛНИСТЫМИ ГРАНИЦАМИ

Л. П. ВОЗОВОЙ

(Пермь)

Конвективное движение в вертикальном канале с плоскими изотермическими стенками, нагретыми до разной температуры, хорошо изучено [1-4]. При достаточных малых числах Грасгофа возникает плоскопараллельное течение с кубическим профилем скорости. В области значений числа Грасгофа выше некоторого критического  $G_c$  это течение становится неустойчивым. Если число Прандтля  $P < 12$ , то развиваются вторичные стационарные движения, для значений  $P > 12$  неустойчивость носит колебательный характер.

Искривление границ области оказывает существенное влияние на характер течения (см., например, [5-6]).

В работе [7] рассматривалась конвекция в вертикальном слое с гармонически искривленными границами при наличии бокового подогрева. Возникающее в этом случае течение представлялось в виде разложения в ряд по степеням малой амплитуды волнистости, причем в качестве нулевого приближения было выбрано плоскопараллельное течение с кубическим профилем скорости. Такое разложение не годится, однако для значений числа Грасгофа, соответствующих окрестности нейтральной кривой и надкритической области задачи с гладкими стенками, где нарушение плоскопараллельности движения происходит и без искривления границ в результате кризиса основного течения.

Ниже приводятся результаты решения задачи о конвективном движении в вертикальном слое с гармонически искривленными границами, которые поддерживаются при разных температурах. Нелинейные уравнения плоской конвекции решаются численно методом конечных разностей. Найдена форма конвективного движения при различных значениях параметров задачи, получена зависимость интегральных характеристик течения от числа Грасгофа, исследуется устойчивость основного решения по отношению к возмущениям с волновыми числами, кратными волновому числу волнистости стенок. Проводится сравнение со случаем недеформированных границ.

1. Пусть твердые деформированные границы слоя описываются уравнением

$$y = \pm d(1 - \varepsilon \cos k_w x)$$

ось  $x$  направлена вертикально вверх, ось  $y$  — горизонтально, начало координат выбрано на оси канала;  $d$  — средняя полуширина слоя. Границы слоя поддерживаются при постоянных температурах  $\pm \Theta$ , и скорость на них обращается в нуль. Конвективное течение предполагается замкнутым (расход жидкости через поперечное сечение канала равен нулю).

Можно ввести преобразование координат согласно формулам

$$\xi = x, \eta = y / (1 - \varepsilon \cos k_w x)$$

Тогда система уравнений плоского конвективного движения для функции тока  $\psi$  и вихря скорости  $\varphi$  (по определению  $\varphi = -\Delta\psi$ ) имеет в координатах  $\xi$  и  $\eta$  следующий вид:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \\ + b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + fG \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$(1.2) \quad 0 = a_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + b \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \varphi$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = P^{-1} a_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + 2P^{-1} a_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + P^{-1} a_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + c_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad a_{22} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$$

$$b_1 = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad b_2 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad f = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$c_1 = b_1, \quad c_2 = P^{-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad b = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Уравнения (1.1)–(1.3) записаны в безразмерной форме. В качестве единиц длины, времени, функции тока и температуры выбраны соответственно  $d$ ,  $d^2/\nu$ ,  $\nu$ ,  $\Theta$  ( $\nu$  – кинематическая вязкость). Параметрами подобия являются число Грасгофа  $G$  и число Прандтля  $P$ .

Краевые условия для величин  $\psi$ ,  $T$  и  $\varphi$  задаются на спрямленных поверхностях  $\eta = \pm 1$

$$(1.4) \quad \psi(\xi, \pm 1) = 0, \quad T(\xi, \pm 1) = \pm 1$$

Краевые условия для вихря скорости будут сформулированы ниже.

Задача решалась методом конечных разностей. Использовалась невязная нестационарная схема метода дробных шагов [2]. Граничные условия для вихря  $\varphi$  задавались по формуле

$$(1.5) \quad \varphi(\xi, 1) = -\frac{a_{22}(\xi, 1)}{h^2} \psi(\xi, 1-h) + \frac{G}{12} [a_{22}(\xi, 1)(h-2)^2 - 4]$$

при  $\eta = 1$ , и аналогично на левой границе при  $\eta = -1$ . Через  $h$  обозначена величина шага сетки по оси  $\eta$ .

Формула (1.5) представляет собой модифицированное условие Тома. Добавление второго слагаемого в правой части (1.5) обеспечивает выполнение этого равенства с нулевой погрешностью в случае основного решения задачи с плоскими границами.

Вдоль оси канала течение считалось периодическим. В качестве расчетной области использовалась прямоугольная ячейка, на горизонтальных границах которой задавались условия периодизма для всех определяемых величин. Решение конечно-разностного аналога уравнения (1.2) осуществлялось методом верхней релаксации; параметр релаксации подбирался экспериментально. Основные расчеты были проделаны на сетке  $15 \times 29$ . Для проверочных вычислений использовалась сетка  $15 \times 57$ . Число  $P = 1$ .

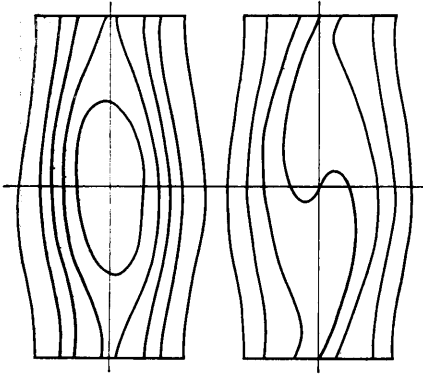
2. Рассмотрим основные результаты для трех следующих случаев.

1. Период модуляции толщины слоя равен длине волны критической моды задачи с плоскими границами ( $k_w = k_c$ ), а высота  $l$  рассматриваемой конвективной ячейки совпадает с периодом волнистости стенок, т. е.  $l = 2\pi/k_w$ .

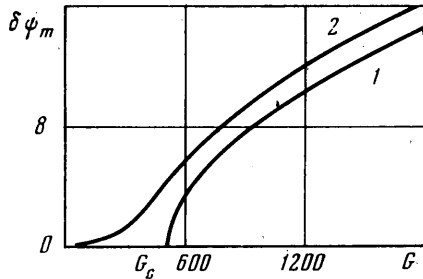
Характерная картина линий тока и изотерм установившегося течения для этого случая приведена на фиг. 1. Появление деформации границ снимает вырождение относительно положения вихря вдоль стенок канала, и устанавливается движение с центром вихря в широкой части слоя (для

задачи с плоскими границами положение вихря относительно стенок оказывается произвольным в силу трансляционной симметрии вдоль оси  $x$ ). Если после того как течение сформировалось скачком передвинуть стенку на полпериода, то вихрь немедленно сместится в расширенную область слоя.

Отклонение движения от плоскопараллельного можно характеризовать величиной  $\delta\psi_m = \max_{i,k} \psi_{ik} - \min_{i,k} (\max \psi_{ik})$ , где индекс  $i$  нумерует узлы сетки вдоль оси  $\xi$ , а индекс  $k$  — вдоль оси  $\eta$ . Зависимость  $\delta\psi_m$  от числа Грасгофа показана на фиг. 2 для случая  $\varepsilon=0.02$ ,  $P=1$  (кривая 2). Видно,



Фиг. 1



Фиг. 2

что с появлением волнистости плоскопараллельное течение становится невозможным уже при сколь угодно малых числах Грасгофа. Для сравнения на той же фигуре изображена кривая 1, соответствующая недеформированным границам ( $\varepsilon=0$ ).

При  $G \ll G_c$  величина  $\delta\psi_m \sim \varepsilon$ , т. е. плоскопараллельность течения искажается в меру искривления границ слоя (приводимые здесь и далее оценки порядков величин получены аналитически в предположении, что амплитуда  $\varepsilon$  мала). В окрестности точки  $G=G_c$  величина  $\delta\psi_m$  резко нарастает и имеет порядок  $\varepsilon^{3/4}$ .

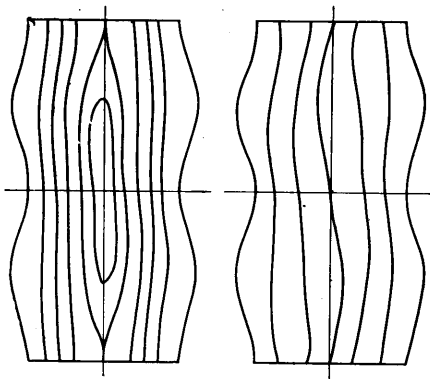
Исследуемое течение с волновым числом  $k_w$  остается устойчивым во всем диапазоне изменения  $G$ .

2. Размеры конвективной ячейки те же, что и в первом случае, но на длине ячейки укладываются два периода волнистости стенок ( $k_w=2k_c$ ). Тогда при достаточно малых числах Грасгофа формируется течение с волновым числом  $k_w$ . По мере увеличения параметра  $G$  это движение, начиная с некоторого значения  $G_1$ , становится неустойчивым по отношению к моде с волновым числом  $k_c$  (для малых  $\varepsilon$  значение  $G_1$  лежит в окрестности  $\Delta G \sim \varepsilon$  точки  $G_c$ ). При этом на фоне основного течения возникает система вихрей, центры которых расположены в узких местах слоя (фиг. 3). Новое движение симметрично относительно центра конвективной ячейки (четная мода).

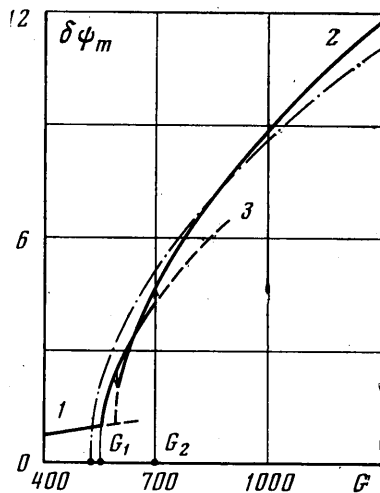
При дальнейшем увеличении числа Грасгофа это решение в свою очередь теряет устойчивость в точке  $G_2 > G_1$ : надкритическое движение меняет свою ориентацию по отношению к стенкам канала, и устанавливается течение с центрами вихрей в широких областях (нечетная мода).

При уменьшении числа Грасгофа наблюдается гистерезис: переход на четное решение затягивается и происходит при  $G < G_2$ . Таким образом, существует интервал  $\Delta G$ , внутри которого устойчивы обе надкритические моды (для  $\varepsilon=0.1$ , например,  $\Delta G \approx 100$ ). На фиг. 4 изображена зависимость  $\delta\psi_m$  от  $G$  при  $\varepsilon=0.1$ ,  $P=1$ . Прямолинейный участок 1 соответствует

основному решению с  $k=k_w$ , кривая 3 относится к четной надкритической моде, а кривая 2 — к нечетной. Волновые числа обоих надкритических движений одинаковы и равны  $k_c$ , но соответствующие вихревые структуры смещены одна относительно другой таким образом, что вихри нечетной моды расположены в широких, а четной — в узких областях слоя. Пунктирные линии соответствуют метастабильным движениям, которые со временем трансформируются в движения с выгодной (при данном значении  $G$ ) ориентацией вихрей относительно стенок канала. Кривая, изобра-



Фиг. 3



Фиг. 4

женная штрихпунктиром, относится к случаю невозмущенных границ ( $\varepsilon=0$ ).

3. Границы слоя искривлены с волновым числом  $k_w = 1/2 k_c$ , и длина конвективной ячейки совпадает с периодом волнистости ( $l = 2\pi / k_w$ ).

В отсутствие деформации стенок канала в области  $G > G_c$  развивается надкритическое движение с волновым числом  $k_c$ . При этом на длине  $0 < x < l$  указанной ячейки формируются два вихря.

Появление волнистости границ приводит к установлению течения, период которого  $2\pi / k_w$ . Нелинейное взаимодействие гармоник с вектором  $k_w$  порождает моды с кратными волновыми векторами —  $2k_w$ ,  $3k_w$  и т. д., — но при достаточно малых числах Грасгофа их амплитуды незначительны. Однако по мере приближения к точке  $G = G_c$  интенсивность гармоники  $2k_w$  быстро растет, и на фоне течения с периодом волнистости границ отчетливо проступает субгармоническая структура, период которой  $\pi / k_w$ . Один из вихрей этой моды располагается в широкой части ячейки и усиливает основную гармонику, создаваемую стенками, а второй вытесняется в узкую область канала. Как и в первом случае, когда  $k_w = k_c$ , переход через точку  $G = G_c$  не сопровождается кризисом основного движения и величина  $\delta\phi_m$  непрерывно меняется с ростом  $G$  в окрестности этой точки.

При дальнейшем увеличении числа Грасгофа в области  $G > G_c$  стационарное течение получить не удастся: взаимодействие мод с волновыми числами  $k_w$  и  $2k_w$  приводит к появлению колебательного режима. При амплитуде волнистости  $\varepsilon = 0.1$  и для сетки  $15 \times 29$  пороговое значение  $G_c \approx 1100$ , причем уменьшение шага сетки несколько понижает это значение. Колебания возникают мягко (с нулевой амплитудой) и с конечной частотой. Аналогичные колебательные режимы наблюдались в [6] при решении за-

дачи об изотермическом течении жидкости между двумя поверхностями вращения, одна из которых (внутренняя) была гармонически искривлена и вращалась, а другая представляла собой неподвижный цилиндр.

Проверочные расчеты показали, что форма и частота колебаний устойчивы к повышению числа итераций при решении конечно-разностного аналога уравнения (1.2), к уменьшению шага сетки, а также к способу аппроксимации граничных условий для вихря скорости. Следует отметить, что происхождение колебаний не связано с волнистостью стенок — они существуют и для течения с гладкими границами.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за постановку задачи и руководство, Е. Л. Тарунина за постоянное внимание к работе, а также А. А. Непомнящего за полезное обсуждение.

Поступила 24 X 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л. Вторичные колебательные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
5. Левченко В. Я., Соловьев А. С. Устойчивость пограничного слоя на волнистой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
6. Симуни Л. М. Численное исследование движения вязкой несжимаемой жидкости между поверхностями вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
7. Watson A., Poots G. The effect of sinusoidal protrusions of laminar free convection between vertical walls. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, No. 1.
8. Яценко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.