

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ
МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ ¹

А. И. ЛЕОНОВ, Э. Х. ЛИПКИНА, Е. Д. ПАСХИН,
А. Н. ПРОКУНИН

(Москва)

В работе [1] была построена теория нелинейного вязкоупругого поведения полимерных жидкостей. В рамках этой теории в работе [2] было рассмотрено движение нелинейной упруговязкой среды при нестационарных и стационарных режимах деформации в условиях простого сдвига, а также было проведено сравнение теории с экспериментом. Эксперименты в [2], проводившиеся на системе конус — плоскость реогиометра Вайссенберга, показали, что эта система непригодна для измерения нормальных напряжений при нестационарных условиях в жидкостях с достаточно большой вязкостью.

Ниже показывается целесообразность измерений нормальных напряжений в этом случае для нестационарных условий (выход на режим установившегося течения и релаксации напряжений) на реогиометре Вайссенберга с рабочим узлом типа диск — диск. В связи с этим необходимо теоретически рассмотреть движение упругой жидкости в зазоре между вращающимися дисками. Отметим, что при этом получается новая информация по сравнению с течением с течением в условиях однородного простого сдвига, так как при движении полимера между двумя дисками вклад в осевое усилие дают все три компонента нормальных напряжений, в то время как при движении в зазоре между конусом и плоскостью вклад в нормальное усилие дает только первая разность нормальных напряжений.

1. Течение жидкости между двумя дисками схематически изображено на фиг. 1, а. Испытуемая жидкость 3 движется в зазоре толщиной h между неподвижным 1 и подвижным 2 дисками с радиусом R . Неподвижный диск снабжен измерителем момента, подвижный диск, вращающийся с угловой скоростью $\Omega = \Omega(t)$, снабжен измерителем нормального усилия. Здесь t — время.

Будем рассматривать задачу в цилиндрической системе координат r, φ, z , при этом ось z совместим с осью вращения. Далее для простоты обозначения введем соответствие: $\varphi \leftrightarrow 1, z \leftrightarrow 2, r \leftrightarrow 3$.

В обсуждаемой задаче, также как и в [2], система уравнений, описывающая данный вид движения, следующая:

$$2\lambda_k \frac{dc_{k,11}}{d\tau} + c_{k,11}^2 + c_{k,12}^2 - 1 = 4\lambda_k \Gamma c_{k,12}$$

$$(1.1) \quad 2\lambda_k \frac{dc_{k,12}}{d\tau} + \frac{c_{k,12}}{c_{k,11}} (c_{k,11}^2 + c_{k,12}^2 + 1) = 2\lambda_k \Gamma \frac{1 + c_{k,12}}{c_{k,11}}$$

$$(1.2) \quad c_{k,22} = \frac{1 + c_{k,12}^2}{c_{k,11}}, \quad \Gamma = \Omega(\tau) \theta \frac{r}{h}$$

¹ В статье А. И. Леонова, Е. Д. Пасхина, А. Н. Прокунина «О наложении сдвиговых колебаний малой амплитуды на стационарное сдвиговое течение упругой жидкости» (Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1) на фиг. 2 все величины, отложенные на оси G_{12} , надо уменьшить в 10 раз.

Здесь θ — время релаксации и $\tau = t/\theta$. В рассмотренной безынерционной постановке величина $\Omega(t)$ считается заданной. Выражение для тензора напряжений σ имеет вид [2].

$$(1.3) \quad \sigma + p\delta = 2\mu \left\{ s\Gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \nu_k \begin{pmatrix} c_{k,11} & c_{k,12} & 0 \\ c_{k,12} & c_{k,22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

В формулах (1.1) — (1.3) $c_{k,ij}$ — компоненты тензора упругих напряжений в k -й релаксационной моде, $\lambda_k, \nu_k, s, \mu, \theta$ — реологические константы, связанные между собой некоторыми соотношениями (подробнее об этом см. [2]).

Для определения давления p необходимо использовать еще одно уравнение с соответствующим краевым условием.

$$(1.4) \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial r} + \frac{\sigma_{33} - \sigma_{11}}{r} = 0, \quad \sigma_{33}|_{r=R} = 0$$

Интегрируя (1.4) с учетом (1.3), получим

$$(1.5) \quad p = 2\mu \sum_{k=1}^N \nu_k \left[1 + \int_{\Gamma}^{\Gamma_R} (c_{k,11}(\tau, x) - 1) \frac{dx}{x} \right] \\ \left(\Gamma_R = \Omega(t) \theta \frac{R}{h} \right)$$

Для рассматриваемой задачи интерес представляют две величины: осевое усилие Q и момент M

$$(1.6) \quad Q = -2\pi \int_0^R \sigma_{22} r dr, \quad M = 2\pi \int_0^R \sigma_{12} r^2 dr$$

Подставляя величину σ_{22} из (1.3) с учетом (1.5) в (1.6) и заменяя интегрирование по r интегрированием по параметру Γ , получим после простых преобразований

$$(1.7) \quad K_m \equiv \frac{M}{4\pi\mu R^3} = 1/4 s\Gamma_R + 1/\Gamma_R^3 \sum_{k=1}^N \nu_k \int_0^{\Gamma_R} \Gamma^2 c_{k,12}(\tau, \Gamma) d\Gamma$$

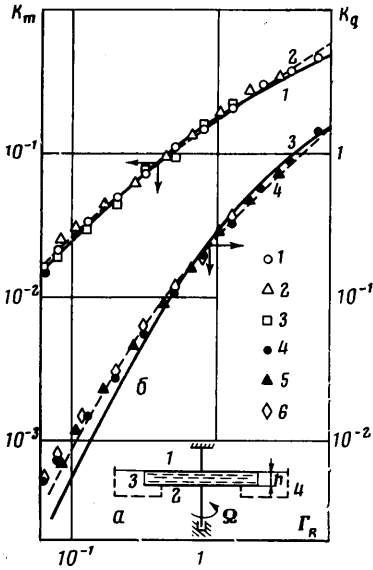
$$(1.8) \quad K_q \equiv \frac{Q}{2\pi\mu R^2} = 1/\Gamma_R^2 \sum_{k=1}^N \nu_k \int_0^{\Gamma_R} \Gamma [c_{k,11}(\tau, \Gamma) + 1 - 2c_{k,22}(\tau, \Gamma)] d\Gamma$$

Далее совершенно аналогично будем рассматривать два режима, для которых величины $K_m(\tau, \Gamma_R)$ и $K_q(\tau, \Gamma_R)$ экспериментально определялись ниже.

Режим выхода на установившееся течение из состояния покоя. В этом случае в (1.2) $\Omega = \text{const}$ при $t > 0$ и параметр Γ в (1.2) зависит только от r .

Для системы (1.1) начальные данные определяются следующим образом (см. [2]):

$$(1.9) \quad c_{k,11}|_{r=0} = 1, \quad c_{k,12}|_{r=0} = 0$$



Фиг. 1

Система (1.1) должна решаться для каждого фиксированного $\Gamma (0 < \Gamma \leq \Gamma_R)$, затем полученные функции $c_{k,ij}(\tau, \Gamma)$ должны интегрироваться по параметру Γ для получения искомых зависимостей $K_m(\tau, \Gamma_R)$, $K_q(\tau, \Gamma_R)$.

В связи с отсутствием аналитического решения для системы (1.1) эта процедура выполнялась численно по следующему алгоритму. Интегралы в (1.7), (1.8) вычислялись по методу Симпсона, а потом суммировались по k от 1 до N , при этом отрезок интегрирования $[0, \Gamma_R]$ разбивался на L равных частей. Далее, придавая параметру Γ дискретные значения Γ_i , из (1.1) получали систему, состоящую из $2 \times N \times L$ ($1 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq L$) независимых уравнений. Эти уравнения интегрировались с переменным шагом по τ и по найденным $c_{k,11}(\tau, \Gamma_i)$ и $c_{k,12}(\tau, \Gamma_i)$ вычислялись K_m и K_q . Это позволило довольно быстро решать задачу без внесения дополнительных погрешностей.

Результаты расчетов приведены ниже в сравнении с экспериментальными данными.

При $\tau \rightarrow \infty$ получаем стационарное решение системы (1.1)

$$(1.10) \quad c_{k,11}(\infty, \Gamma) = \frac{\sqrt{2} \alpha_k}{\sqrt{1 + \alpha_k}}, \quad c_{k,22}(\infty, \Gamma) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \alpha_k}}, \quad c_{k,12}(\infty, \Gamma) = \frac{2\lambda_k \Gamma}{\sqrt{1 + \alpha_k}}$$

$$\alpha_k = \sqrt{1 + 4\lambda_k^2 \Gamma^2}$$

Подставляя эти выражения в (1.7) и (1.8) и интегрируя, получим

$$(1.11) \quad K_m(\infty, \Gamma_R) = \frac{1}{24\Gamma_R^3} \sum_{k=1}^N \frac{\nu_k}{\lambda_k^3} (\alpha_k^3 - 6\lambda_k^2 \Gamma_R^2 - 1) + \frac{1}{4} s\Gamma_R$$

$$(1.12) \quad K_q(\infty, \Gamma_R) = \frac{1}{2\Gamma_R^2} \sum_{k=1}^N \frac{\nu_k}{\lambda_k^2} \left\{ \lambda_k^2 \Gamma_R^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{15} \left[(31 + 12\lambda_k^2 \Gamma_R^2 - 14\alpha_k) \sqrt{\frac{1 + \alpha_k}{2}} - 17 \right] \right\}$$

Результаты расчетов по формулам (1.11), (1.12) также сопоставлены ниже с данными экспериментов.

Режим релаксации с установившегося течения. В этом случае при $\tau > \tau_0$ имеем $\Omega = 0$ и исследуем затухание напряжений. Система (1.1) с начальными данными $c_{k,ij}/\tau = \tau_0 = c_{k,ij}^0$, где $c_{k,ij}$ определены формулами (1.10), допускает явное решение, приведенное в [2], которое при подстановке в (1.7), (1.8) дает следующие выражения для K_m, K_q :

$$(1.13) \quad K_m(\tau, \Gamma_R) = \frac{4}{\Gamma_R^3} \sum_{k=1}^N \nu_k \int_0^{\Gamma_R} \frac{n_k(\Gamma) e^{-\beta_k \Gamma^2} d\Gamma}{\sqrt{m_k^2(\Gamma) + 4(1 + n_k^2(\Gamma) e^{-2\beta_k})}}$$

$$(1.14) \quad K_q(\tau, \Gamma_R) = \frac{2}{\Gamma_R^2} \sum_{k=1}^N \nu_k \times$$

$$\times \int_0^{\Gamma_R} \Gamma \left[\frac{3m_k(\Gamma) n_k(\Gamma) e^{-\beta_k}}{\sqrt{m_k^2(\Gamma) + 4(1 - n_k^2(\Gamma) e^{-2\beta_k})}} - \frac{n_k^2(\Gamma) e^{-2\beta_k}}{1 - n_k^2(\Gamma) e^{-2\beta_k}} \right] d\Gamma, \quad \beta_k = \tau - \tau_0 / \lambda_k$$

Здесь m_k и n_k в общем случае релаксации с неустановившегося течения определяются по простым формулам с начальными данными $c_{k,ij}^0(\Gamma)$ [2]. Для релаксации со стационарного режима эти величины определяются следующими выражениями:

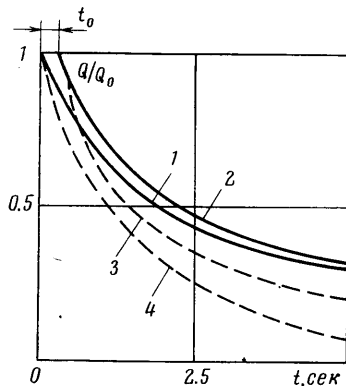
$$(1.15) \quad m_k(\Gamma) = \frac{2\sqrt{2}\lambda_k\Gamma}{\sqrt{1+\alpha_k}}, \quad n_k^2(\Gamma) = \frac{\sqrt{1+\alpha_k}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha_k}+\sqrt{2}}$$

Дальнейшие вычисления по формулам (1.13), (1.14) проводились с помощью численного интегрирования и ниже сопоставлены с экспериментами.

2. Эксперименты проводились на реогониометре Вайссенберга R-18. Как и в [2], исследовался 40% раствор бутилкаучука в трансформаторном масле с наибольшей ньютоновской вязкостью $\eta = 1.7 \times 10^4$ нз при 22° С. Течение жидкости осуществлялось между двумя параллельными дисками (см. рис. 1, а), расстояние между которыми h . Диаметр дисков $2R = 5$ см. Константы измерительных балок те же, что и в [2]. Измерялись крутящий момент M на верхнем диске и нормальное усилие Q на нижнем при вращении нижнего диска с постоянной скоростью Ω и последующей релаксацией со стационарного течения.

Опыты проводились как с «чашкой», залитой испытуемой жидкостью, так и без нее. «Чашка» частично предотвращала вытекание жидкости из зазора h и исключала влияние капиллярных сил на усилие Q .

Разброс экспериментальных данных при стационарном течении не превосходил $\pm 7\%$ для нормального усилия Q и $\pm 5\%$ для крутящего момента M . Измерения M и Q проводились при скоростях деформации $\dot{\gamma}_R = \Omega R/h$ от 7×10^{-2} до 6 сек^{-1} . Основная часть опытов проводилась при $h = 2.52$ и 4 мм. При $\dot{\gamma}_R > 6 \text{ сек}^{-1}$ даже при использовании «чашки» и зазоре $h = 2.52$ мм происходило интенсивное вытекание жидкости из зазора.



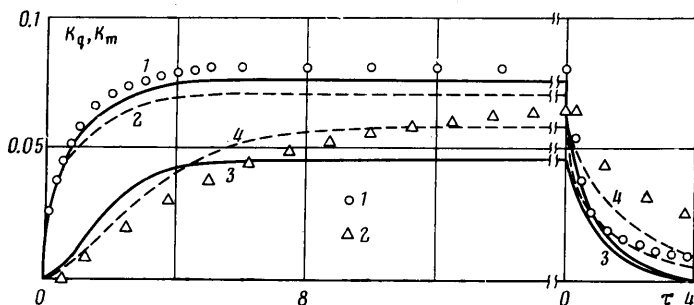
Фиг. 2

Как было указано в [2], при работе с рассматриваемой жидкостью на измерительной системе конус — плоскость время выхода на стационарное течение и релаксация с установившегося течения нормальных напряжений приблизительно в 100 раз превышают соответствующее время для касательного напряжения. Аналогичное явление наблюдалось рядом авторов ранее для различных упругих жидкостей (см., например, [3]), где это явление трактовалось как эффект, характерный для упругих жидкостей. Ниже показывается, что «эффект» столь большого запаздывания между касательным и нормальным напряжениями по крайней мере для исследованной упругой жидкости обусловлен системой измерений.

Действительно, при обычно употребляемых в практике системах измерения нормальных напряжений, основанных на замере малых осевых перемещений одной из измерительных поверхностей, возникает типичный эффект смазочного слоя, заключающийся в изменении нормального давления в жидкости при изменении расстояния между двумя поверхностями. Как известно, этот эффект тем более значителен, чем меньше расстояние между поверхностями и чем больше вязкость жидкости и может оказывать решающее влияние на измерения нормальных напряжений в переходных процессах. Особенно значителен этот эффект в системе конус — плоскость, где нормальные напряжения максимальны, а зазор минимален у оси вращения. В стационарных процессах для часто применяемых в практике измерений нормальных напряжений компенсационных схем (как, например, это предусмотрено в схеме реогониометра Вайссенберга) эти эффекты, как правило, не проявляются.

Для учета этих явлений необходимо было использовать измерительную схему, которая давала бы возможность менять размер зазора между измерительными по-

верхностями, не меняя характера течения. Удобной для этой цели оказалась схема диск — диск, где можно было осуществлять измерения в широком диапазоне изменения зазора h . Опыты проводились при h от 0.5 мм до 5 мм для одной скорости деформации $\dot{\gamma}_R$. При малых h так же, как и в случае схемы конус — плоскость имеется весьма значительное запаздывание по выходу на установившийся режим течения и релаксации между зависимостями $Q(\tau)$ и $M(\tau)$. С увеличением толщины зазора этот эффект уменьшается и при $h \geq 4$ мм перестает зависеть от h . Таким образом, показано, что временной ход зависимости нормальных напряжений как при

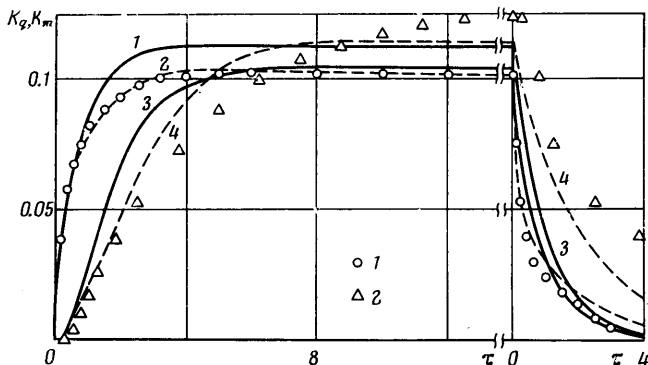


Фиг. 3

выходе на установившийся режим течения, так и при релаксации отличается от аналогичной зависимости для касательных напряжений не более 2–4 раз.

Для более детального анализа зависимости $Q(t)$ необходимо учесть еще запаздывающие характеристики механической схемы прибора [4].

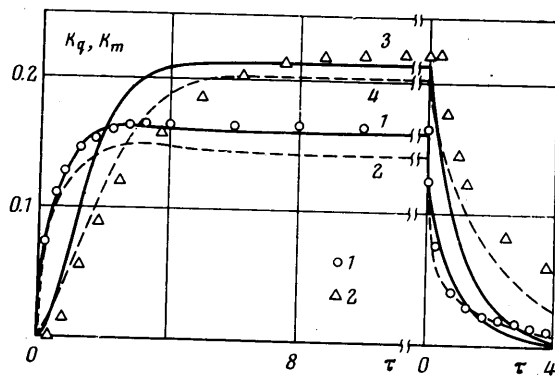
Действительно, как видно, например, из фиг. 2, имеется некоторое характерное время запаздывания t_0 реакции прибора на поведение материала в зазоре, ко-



Фиг. 4

торое особенно необходимо учитывать в условиях быстро протекающих процессов нагружения и разгрузки (особенное значительны эти эффекты при больших величинах $\dot{\gamma}_R$). Для исследования временной характеристики прибора на измерительную систему нормальных напряжений (в данном случае на диск 2 на фиг. 1, а) в отсутствие полимера с помощью электромагнита постоянного тока задавалась осевая нагрузка по заданному закону (см. фиг. 2, кривая 1) и фиксировалась реакция измерительной схемы на это воздействие (фиг. 2, кривая 2). Из фиг. 2, где по осям ординат отложена относительная нагрузка (Q_0 — нагрузка, соответствующая стационарному режиму течения), видно, что в данном опыте характерное время запаздывания прибора $t_0 \approx 0.2 - 0.3$ сек и практически не изменяется (см. также экспериментальные данные на фиг. 3–5 на начальных этапах процессов развития течения и релаксации). В случае, когда влияние толщины зазора на результаты измерения нормальных напряжений несущественно, в принципе можно с помощью описанной методики с электромагнитом получить искаженную прибором временную зависимость нормальных напряжений для упругой жидкости. В этом случае подаваемый на электромагнит сигнал должен выбираться таким образом, чтобы полученная кривая нормального усилия, фиксируемая измерительной системой, совпала с аналогичной кривой $Q(t)$, полученной в эксперименте на упругой жидкости на этом же приборе.

3. Зависимости безразмерного крутящего момента K_m и безразмерного нормального усилия K_q от безразмерной скорости деформации на краю дисков Γ_R при стационарном течении приведены на фиг. 1, б. Здесь и далее на фиг. 3—5 точками обозначены экспериментальные значения, кривыми — теоретические. Сплошной линией обозначаются кривые, полученные по первому приближению с константами $s=0.18$; $\nu_1=0.824$; $\lambda_1=1$,



Фиг. 5

пунктирными линиями — кривые, полученные по второму приближению с константами $s=5.88 \cdot 10^{-2}$, $\nu_1=2.68$, $\nu_2=0.303$, $\lambda_1=0.125$, $\lambda_2=2$. При этом $\eta=1.7 \cdot 10^3$ нз и $\theta=0.8$ сек. Методика подбора констант рассмотрена в [2]. Кривыми 1 и 2 соответствуют касательные, а кривым 3, 4 — нормальные напряжения.

На фиг. 1, б точкам 1, 2, 3 отвечают экспериментальные значения $K_m(\Gamma_R)$, точкам 4, 5, 6 — экспериментальные значения $K_q(\Gamma_R)$, где K_m и K_q определены по формулам

$$K_m = M/4\pi\mu R^3, K_q = Q/2\pi\mu R^2, \mu = \eta/\theta$$

При этом экспериментальные точки 1, 4; 2, 5; 3, 6 получены при зазорах 2.52, 3 и 4 мм соответственно. Влияние зазора в указанном диапазоне на экспериментальные значения K_m и K_q незначительно.

На фиг. 3, 4 и 5 показаны теоретические и экспериментальные зависимости K_m и K_q при сдвиговом течении и релаксации от безразмерного времени τ при $\Gamma_R=0.312, 0.496$ и 0.785 .

Из сравнения экспериментальных и расчетных данных видно, что K_m описывается хорошо для обоих приближений, а K_q лучше согласуется со вторым приближением, учитывающим более высокие времена релаксации.

Из фиг. 2 видно, что результат сравнения теоретических (кривая 4) и экспериментальных (кривая 3) данных для случая релаксации напряжений с установившегося течения может быть несколько улучшен при учете времени запаздывания прибора t_0 .

Поступила 5 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов А. И. Об описании реологического поведения упруговязких сред при больших упругих деформациях. (Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт № 34.) М., 1973.
2. Леонов А. И., Липкина Э. Х., Пасхин Е. Д., Прокунин А. Н. О теоретическом и экспериментальном исследовании сдвиговых деформаций в упругих полимерных жидкостях. Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3.
3. Виноградов Г. В., Малкин А. Я., Шумский В. Ф. Реологические свойства бутилкаучуков и низкомолекулярного полиизобутилена. В кн.: Успехи реологии полимеров. М., «Химия», 1970.
4. Sakai M., Fukaya H., Nagasawa M. Time dependent viscoelastic properties of concentrated polymer solutions. Trans. Soc. Rheol., 1972, vol. 16, No. 4.